

Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego  
w Warszawie  
Instytut Inżynierii Lądowej

Mykola Nagirniak

# Modyfikacja modelu podłoża Vlasova

Modification of the Vlasov subsoil model

Praca doktorska

Doctoral thesis

Praca wykonana pod kierunkiem  
prof. dr. hab. inż. Grzegorza Jemielity  
dr. hab. inż. Mirosława Lipińskiego  
Katedra Geotechniki


Warszawa, 2023



### Oświadczenie promotora pracy

Oświadczam, że niniejsza praca została przygotowana pod moim kierunkiem i stwierdzam, że spełnia ona warunki do przedstawienia jej w postępowaniu o nadanie stopnia naukowego doktora.


Data 10.07.2023

Podpis promotora pracy 

### Oświadczenie promotora pracy

Oświadczam, że niniejsza praca została przygotowana pod moim kierunkiem i stwierdzam, że spełnia ona warunki do przedstawienia jej w postępowaniu o nadanie stopnia naukowego doktora.

Data 10 lipca 2023

Podpis promotora pracy 

### Oświadczenie autora pracy

Świadom odpowiedzialności prawnej oświadczam, że niniejsza praca dyplomowa została napisana przez mnie samodzielnie i nie zawiera treści uzyskanych w sposób niezgodny z obowiązującymi przepisami.

Oświadczam również, że przedstawiona praca nie była wcześniej przedmiotem procedur związanych z uzyskaniem tytułu zawodowego w wyższej uczelni.

Oświadczam ponadto, że niniejsza wersja pracy jest identyczna z załączoną wersją elektroniczną.

Data 10.07.2023

Podpis autora pracy 



## Streszczenie

### Modyfikacja modelu podłoża Vlasova

W pracy przedstawiono porównanie rozwiązań zagadnień półprzestrzeni i warstwy sprężystej, uzyskanych na podstawie modelu podłoża sprężystego Vlasova, z rozwiązaniem ścisłym teorii sprężystości, a także modyfikacje modelu Vlasova, polegające na bardziej ogólnych założeniach kinematycznych oraz uwzględnieniu niejednorodności i poprzecznej izotropii ośrodka gruntowego.

W pracy uzyskano rozwiązanie ściśle teorii sprężystości dla półprzestrzeni oraz warstwy obciążonej na powierzchni w kształcie koła i prostokąta. Wykazano rozbieżność pomiędzy wartościami przemieszczeń, uzyskanych według rozwiązania ścisłego teorii sprężystości oraz modelu podłoża Vlasova dla najbardziej typowych przypadków obciążeń półprzestrzeni i warstwy sprężystej. Podano ścisłe i przybliżone wzory na wyznaczenie przemieszczeń półprzestrzeni i warstwy, obciążonych w kształcie koła lub prostokąta na powierzchni ograniczającej półprzestrzeń lub wierzchnią warstwę podłoża.

W pracy przedstawiono również zmodyfikowany model, w ogólnym przypadku niejednorodnego (charakterystyki materiałowe są zmienne po głębokości warstwy), poprzecznie izotropowego podłoża sprężystego, przy założeniu, że wektor przemieszczenia ma trzy niezerowe składowe. Także w pracy przedstawiono zmodyfikowany dwuparametrowy model podłoża o własnościach gradientowych. Wykonano porównanie zmodyfikowanych modeli z modelem podłoża Vlasova i rozwiązaniem ścisłym teorii sprężystości dla warstwy obciążonej na powierzchni w kształcie koła i prostokąta.

Zaproponowano zmodyfikowane funkcje zanikania przemieszczeń wraz z głębokością, otrzymane na podstawie rozwiązań ścisłych teorii sprężystości.

W odniesieniu do charakterystyk materiałowych, przedstawiono propozycję doboru sztywności gruntu w zakresie małych i średnich odkształceń.

Słowa kluczowe: podłoże Vlasova, zmodyfikowany model podłoża, półprzestrzeń, warstwa sprężysta, obciążenie w kształcie koła, obciążenie w kształcie prostokąta, ortogonalizacja Galerkina, funkcja zanikania przemieszczeń, dobór sztywności gruntu.

## Summary

### **Modification of the Vlasov subsoil model**

The thesis presents a comparison of solutions of the problems of an elastic half-space and layer obtained based on the Vlasov elastic foundation model with the exact solution of the theory of elasticity, as well as modifications of the Vlasov model, consisting in more general kinematic assumptions and considering an inhomogeneity and a transverse isotropy of a subsoil medium.

In the work, an exact solution of the theory of elasticity was obtained for the half-space and a layer, both loaded on a surface having the shape of a circle and a rectangle. A discrepancy between the values of displacements obtained according to the exact solution of the theory of elasticity and according to the Vlasov model for the most typical cases of loads on the half-space and the elastic layer was shown. The exact and approximate formulas for determining the displacements of the half-space and the layer, loaded by a load in the shape of a circle or a rectangle, acting on the surface limiting the half-space or the top layer of the substrate, were given.

The thesis also presents a modified model of a transversely isotropic elastic foundation; in general case, the foundation is non-homogeneous (material characteristics are variable with layer depth) and it is assumed that the displacement vector has three non-zero components. Moreover, a modified two-parameter model of the subsoil with gradient properties is presented in the thesis. A comparison of the modified models with the Vlasov subsoil model and the exact solution of the theory of elasticity in the case of a layer loaded on a surface having the shape of a circle and a rectangle was made.

Modified functions of a disappearance of displacements along with depth, obtained on the basis of exact solutions of the theory of elasticity, were proposed.

With regard to material characteristics, a proposal for soil stiffness selection in terms of small and medium strains was presented.

**Keywords:** Vlasov subsoil, modified model of subsoil, half-space, elastic layer, circular load, rectangular load, Galerkin orthogonalization, displacement disappearance function, soil stiffness selection.

## SPIS TREŚCI

<b>1. WSTĘP .....</b>	<b>10</b>
1.1 Wprowadzenie .....	10
1.2 Cel i zakres pracy.....	17
1.3 Hipoteza badawcza .....	20
1.4 Oznaczenia.....	20
<b>2. STATYKA WARSTWY GRUNTU WEDŁUG TEORII VLASOVA.....</b>	<b>22</b>
2.1 Cel rozdziału .....	22
2.2 Przestrzenny stan odkształcenia.....	22
2.3 Płaski stan odkształcenia .....	25
<b>3. PRZESTRZENNE ZAGADNIENIA TEORII SPRĘŻYSTOŚCI .....</b>	<b>27</b>
3.1 Cel rozdziału .....	27
3.2 Wybrane zagadnienia obciążenia półprzestrzeni sprężystej .....	28
3.2.1 Zagadnienie Boussinesq'a .....	28
3.2.2 Półprzestrzeń obciążona równomiernie na powierzchni prostokąta .....	29
3.2.3 Warstwa obciążona równomiernie na powierzchni prostokątnej .....	40
3.3 Zagadnienie obrotowo-symetryczne.....	46
3.3.1 Jednorodna półprzestrzeń poddana obciążeniu w kształcie koła.....	47
3.3.2 Warstwa spoczywająca na nieodkształcalnym podłożu .....	52
3.3.3 Warstwa spoczywająca na półprzestrzeni sprężystej.....	58
3.3.4 Układ dwu warstw spoczywających na nieodkształcalnym podłożu .....	63
3.3.5 Półprzestrzeń i warstwa poprzecznie izotropowe .....	65
<b>4. ROZWIĄZANIA PRZYBLIŻONE WYBRANYCH PRZYPADKÓW</b>	
<b>OBCIĄŻENIA WARSTWY SPRĘŻYSTEJ.....</b>	<b>71</b>
4.1 Cel rozdziału .....	71
4.2 Warstwa obciążona równomiernie na powierzchni koła .....	71
4.3 Warstwa obciążona równomiernie na powierzchni prostokąta .....	79
4.4 Funkcja zanikania przemieszczeń $\psi(\zeta)$ .....	82

4.4.1 Zmodyfikowane funkcje Vlasova zanikania przemieszczeń .....	84
4.4.2 Zmodyfikowane funkcje zanikania przemieszczeń, bazujące na ścisłych rozwiązaniach teorii sprężystości .....	85
<b>5. WERYFIKACJA MODELU PODŁOŻA VLASOVA .....</b>	<b>89</b>
5.1 Cel rozdziału .....	89
5.2 Warstwa obciążona równomiernie na powierzchni koła.....	89
5.3 Warstwa obciążona równomiernie na powierzchni prostokąta.....	94
<b>6. ZMODYFIKOWANY MODEL PODŁOŻA.....</b>	<b>98</b>
6.1 Cel rozdziału .....	98
6.2 Podstawowe założenia.....	98
6.3 Ogólny model podłoża Vlasova .....	101
6.4 Zmodyfikowany model podłoża przy założeniu różnych funkcji zanikania w płaszczyźnie $z=const$ oraz wzdłuż osi $z$ .....	103
6.5 Inne zmodyfikowane modele podłoża.....	107
6.6 Dwuparametrowy zmodyfikowany model podłoża Vlasova .....	109
6.7 Osiosymetryczny model zmodyfikowanego podłoża Vlasova .....	109
<b>7. WERYFIKACJA ZMODYFIKOWANEGO MODELU PODŁOŻA.....</b>	<b>113</b>
7.1 Cel rozdziału .....	113
7.2 Jednorodna i izotropowa warstwa gruntowa.....	113
7.2.1 Obciążenie w kształcie prostokąta .....	113
7.2.2 Obciążenie w kształcie koła .....	124
7.3 Rozwiązanie poprzecznie izotropowej warstwy według dwuparametrowego modelu.....	128
7.4 Warstwa o zmiennej sztywności po głębokości.....	134
<b>8. DOBÓR PARAMETRÓW SZTYWNOŚCI.....</b>	<b>141</b>
8.1 Czynniki określające zależność $\sigma$ - $\varepsilon$ w gruncie .....	141
8.2 Sztywność początkowa gruntu .....	143
8.3 Nieliniowy rozkład sztywności gruntu.....	145



8.3.1 Nieliniowy rozkład charakterystyki $\sigma$ - $\varepsilon$ .....	145
8.3.2 Uwarunkowania rozkładu sztywności w zakresie małych i średnich odkształceń.....	147
8.3.3 Charakterystyki progowych stref odkształcenia .....	148
8.4 Propozycja doboru parametrów sztywności .....	150
8.4.1 Równanie opisujące rozkład sztywności .....	150
8.4.2 Grunt spoisty.....	151
8.4.3 Grunt niespoisty .....	152
8.4.4 Wpływ odkształcenia referencyjnego na rozkład sztywności gruntu .....	153
8.4.5 Dobór modułu odkształcenia .....	154
<b>9. PODSUMOWANIE I WNIOSKI.....</b>	<b>156</b>
9.1 Podsumowanie .....	156
9.2 Wnioski.....	161
9.3 Najważniejsze elementy pracy.....	162
<b>Załącznik 1. Modele matematyczne podłoża sprężystego .....</b>	<b>163</b>
<b>Załącznik 2. Rozwiązanie zagadnień teorii sprężystości .....</b>	<b>171</b>
1. Zagadnienie Boussinesq'a. Zastosowanie funkcji Greena .....	171
2. Obciążenie na obszarze prostokąta .....	172
3. Analiza wzorów danych w pracach [2], [3], [76] .....	173
4. Zagadnienie obrotowo-symetryczne.....	174
5. Półprzestrzeń sprężysta obciążona równomiernie na powierzchni koła.....	177
6. Warstwa sprężysta obciążona równomiernie na powierzchni koła .....	180
7. Ciało poprzecznie izotropowe .....	181
<b>PRACE CYTOWANE W TEKSCIE.....</b>	<b>184</b>

# 1. WSTĘP

## 1.1 Wprowadzenie

Modelowanie podłoża gruntowego ciągle wzbudza zainteresowanie wielu badaczy, ponieważ jest ono związane ze wszystkimi typami budowli, stosowanych w praktyce inżynierskiej. Zachowanie gruntów pod obciążeniem jest zagadnieniem bardzo skomplikowanym, w dużym stopniu różniącym się od zachowania materiałów konstrukcyjnych [1], s. 6. Grunt jest materiałem o mniejszej wytrzymałości, charakteryzujący się nieliniowymi właściwościami fizycznymi, co prowadzi z kolei do potrzeby opracowania specjalnych metod badania własności mechanicznych oraz ich matematycznemu opisaniu [2], s. 7.

Modelowanie matematyczne pozwala uniknąć bardzo kosztownych i często niewykonalnych w pełnej skali eksperymentów oraz rozwiązać rozmaite problemy techniczne jeszcze na etapie projektowania. W związku z rozwojem metod i narzędzi obliczeniowych oraz wzrastającymi wymaganiami dotyczącymi projektowania, wynikła potrzeba tworzenia nowych matematycznych modeli podłoża gruntowego, a także ich analizę. Nowe, dokładniejsze modele mogą uwzględniać nie tylko sprężyste właściwości podłoża, ale też lepkość, plastyczność, niejednorodność, anizotropowość, zmianę wilgotności itp. Stworzenie matematycznego modelu podłoża gruntowego, w pełni dobrze opisującego mechaniczne właściwości rozmaitych gruntów jest związane ze znacznymi trudnościami matematycznymi [2], s. 6. Wskutek powyższego, powstało wiele matematycznych modeli podłoża<sup>1/</sup>.

Modelem podłoża sprężystego, w przypadku bardzo małych odkształceń, jest półprzestrzeń lub warstwa sprężysta. Z uwagi na duże trudności matematyczne poszukiwane są modele 2D.

Rozróżnia się dwa typy modeli: strukturalne i fenomenologiczne. Pierwsze z nich powstają na bazie równań teorii sprężystości 3D, przez wprowadzanie założeń upraszczających, w wyniku których otrzymujemy 2D model podłoża, drugie zaś przez wprowadzenie do modelu różnych elementów konstrukcyjnych takich jak: sprężyny, błony, płyty, tłumiki, itp.

---

<sup>1/</sup> Szereg różnych modeli podłoża opisano w Załączniku 1.

Jeśli osiadanie<sup>2/</sup>, przemieszczenia poziome albo obrót budowli są znaczne lub nierównomierne, to takie przemieszczenia mogą naruszyć normalne warunki eksploatacyjne obiektu budowlanego. Z tego względu przy projektowaniu każda budowla powinna spełniać warunki nośności oraz użyteczności [3], s. 5.

Największe błędy przy prognozowaniu zachowania się materiału pod obciążeniem popełnia się na etapie założeń. Na przykład założenie, że ośrodek gruntowy jest ciągły, daje możliwość wykorzystania teorii sprężystości i plastyczności, przy czym błąd, popełniany przy wyznaczaniu naprężeń, jest niewielką wadą, w porównaniu do korzyści jakie się uzyskuje [4], s. 18.

W gruntach, w różnych proporcjach, występują cechy sprężyste, lepkosprężyste lub plastyczne. Teorie, opisujące ciała wykazujące te cechy są bardzo użyteczne w opisie ośrodka gruntowego. W dziedzinie geotechniki obecnie najczęściej stosowane są różne modele matematyczne przedstawiane w postaci równań konstytutywnych i traktujące zachowanie się materiału w kategorii przyczyny i skutku [4], s. 18.

W ciałach fizycznie nieliniowych naprężenia i odkształcenia są ze sobą powiązane nieliniowo. Tę nieliniową zależność można analitycznie zapisać w postaci  $\sigma_{ij}=f(\varepsilon_{ij})$ . Wielkości zależne od odkształceń nazywane są zmiennymi modułami deformacji [5], s. 23. Wpływ nieliniowych odkształceń na sztywność gruntu był szeroko badany w ciągu ostatnich dziesięcioleci. Stwierdzono, że maksymalne odkształcenie, przy którym grunt zachowuje się sprężysto, jest bardzo małe. Jak wykazano w pracy [6], wraz ze wzrostem odkształcenia, sztywność gruntu zmniejsza się według funkcji nieliniowej. Natomiast początkowy moduł sprężystości  $E_0$  jest dużo większy od wartości przyjętych normie [7] i wykorzystywanych przy projektowaniu.

W porównaniu z innymi ośrodkami rozpatrywanymi w teorii sprężystości i plastyczności, ośrodek gruntowy jest dość skomplikowanym układem mechanicznym. W rzeczywistości warstwy gruntowe mogą znajdować się w rozmaitych warunkach, a ich parametry takie jak gęstość czy wilgotność mogą bardzo się różnić [5], s. 411. Jednak większość materiałów, w tym i grunt, przy bardzo małych odkształceniach zachowuje się zgodnie z prawem Hooke'a. W przypadku dużych deformacji, związki geometryczne, tj. zależność odkształceń od gradientów przemieszczeń są nieliniowe i mamy do czynienia

---

<sup>2/</sup> Przez osiadanie rozumiano pionowe przemieszczenie podłoża wywołane oddziaływaniem budowli na podłoże. Osiadanie może być równomierne lub nierównomierne.

z równaniami nieliniowej teorii sprężystości<sup>3/</sup>. Rozwiązanie tych równań nastęrcza wiele trudności.

Matematyczna teoria sprężystości pozwala wyznaczyć oraz ocenić wielkości, charakteryzujące deformację (przemieszczenia i odkształcenia) ciała oraz naprężenia, będące wynikiem obciążenia ciała. Zakładamy, że dla analizy stanu naprężenia oraz odkształcenia będą wykorzystywane metody fizyki matematycznej<sup>4/</sup>. W teorii sprężystości zastępujemy rzeczywiste ciało modelem ośrodka ciągłego, tak zwanego *kontinuum sprężystego*. Zakładamy, że w trakcie deformacji ciała nie powstają na jego powierzchni dodatkowe więzy [11], s. 95.

Przy rozwiązywaniu pewnych zagadnień teorii sprężystości napotykamy na poważne trudności. Nie istnieje ogólne rozwiązanie, a także ogólna metoda rozwiązywania podstawowych równań teorii sprężystości [12], s. 102. Znanych jest szereg analitycznych oraz numerycznych metod rozwiązywania równań różniczkowych teorii sprężystości w przypadkach szczególnych. Różne przedstawienia wektora przemieszczenia wraz z przykładami ich zastosowań w rozmaitych zagadnieniach, są przedstawione między innymi w monografii W. Nowackiego [11] na s. 160-244. Prawie wszystkie te przedstawienia bazują na twierdzeniu Almansiego (*suma dwóch funkcji harmonicznych postaci  $\varphi + x_i \psi$  ( $i=1,2,3$ ) jest funkcją biharmoniczną* [11], s. 161) oraz na przedstawieniu wektora przemieszczenia w postaci Helmholtza [11], s. 169,173. Te rozwiązania analityczne szczególnych przypadków mogą być uzyskane przy wykorzystaniu przedstawień E. Trefftza, Papkowicza-Neubera, Galerkina, Love'a, Lamégo, Helmholtza, itp. Wprowadzono szereg funkcji naprężeń<sup>5/</sup>, które często są funkcjami biharmonicznymi. Rozwiązania odpowiednich równań różniczkowych uzyskano, stosując metody transformacji całkowych: Fouriera (wykładnicza, cosinusowa i sinusowa), Hankela i Laplace'a. Wraz z nimi istnieją inne, dokładne lub formalnie ściśle<sup>6/</sup>, przybliżone analityczne oraz numeryczne metody rozwiązywania równań różniczkowych, które w wielu przypadkach prowadzą do końcowego celu. Oto niektóre z nich: metody odwrotne i półodwrotne, metoda

---

<sup>3/</sup> Odróżniamy teorię geometrycznie nieliniową od teorii fizycznie nieliniowej. Mówimy o teorii geometrycznie nieliniowej wtedy, gdy związki geometryczne są nieliniowe, a równania konstytutywne tensorowo liniowe. Jeśli równania konstytutywne są nieliniowe przy liniowych zależnościach geometrycznych, to mówimy o teorii fizycznie nieliniowej. W ogólnym przypadku, zarówno równania konstytutywne, jak też związki geometryczne mogą być nieliniowe.

<sup>4/</sup> Równania fizyki matematycznej przedstawiono między innymi w monografiach [8], [9], [10].

<sup>5/</sup> Funkcjami naprężeń nazywamy funkcje, których pochodne są naprężeniami.

<sup>6/</sup> Mówimy o formalnie ścisłych rozwiązaniach równań teorii sprężystości wtedy, gdy poszukiwane rozwiązanie doprowadza się do nieskończonego układu równań algebraicznych lub układu nieskończonych układów równań.

zespolonych funkcji naprężeń w płaskim zagadnieniu teorii sprężystości, przekształcenia całkowe, przybliżone analityczne i numeryczne metody [12], s. 118-141.

W celu uzyskania przybliżonego analitycznego rozwiązania danego zagadnienia brzegowego, przyjmujemy pewne funkcje aproksymujące w postaci np. wielomianów, szeregów funkcji, itp. Przybliżenie może dotyczyć tylko jednej zmiennej lub wszystkich zmiennych. Po wstawieniu przyjętego przybliżenia w postaci iloczynu przyjętej funkcji aproksymującej jednej zmiennej i poszukiwanej funkcji pozostałych zmiennych, otrzymujemy układ równań cząstkowych dwóch zmiennych. Ten układ równań nie spełnia wyjściowego układu o trzech zmiennych przestrzennych. Powstaje pewien błąd i dążymy do jego minimalizacji. Najogólniejszą metodą minimalizacji powstałego błędu jest metoda ortogonalizacji. Mamy dwie podstawowe metody ortogonalizacyjne: B. G. Galerkina (zwaną też Bubnova-Galerkina) [13] i G. I. Petrova [14], [15]. W metodzie Galerkina funkcje ortogonalizujące są takie same jak funkcje aproksymujące, w metodzie Petrova zaś – funkcje ortogonalizujące są różne od funkcji aproksymujących.

Inny podział metod przybliżonych dotyczy zastosowanych funkcji aproksymujących. Jeśli funkcje aproksymujące spełniają warunki brzegowe, to mówimy o metodzie wewnętrznej, jeśli przyjęte funkcje spełniają ściśle równania różniczkowe, to mówimy o metodzie brzegowej. W pierwszym przypadku minimalizujemy błąd powstały z niespełnienia równań różniczkowych, w drugim zaś – z niespełnienia warunków brzegowych [16], s. 37.

Od lat sześćdziesiątych ubiegłego wieku, do rozwiązywania równań teorii sprężystości szeroko stosowane są metody numeryczne, takie jak: metoda różnic skończonych (*MRS*)<sup>7/</sup>, metoda kolokacji obszarów skończonych<sup>8/</sup>, metoda elementów skończonych (*MES*) [19], która pojawiła się w latach 60 ubiegłego wieku w monografii Zienkiewicza i Chenga, metoda elementów brzegowych (*MEB*)<sup>9/</sup>, itp. Te metody są bardzo uniwersalne, pozwalają otrzymać przybliżone rozwiązania skomplikowanych zagadnień, w których nie jest możliwe uzyskanie ścisłych analitycznych wyników. Z grupy numerycznych metod komputerowych, *MES* jest podstawową metodą rozwiązywania zagadnień mechaniki nawierzchni drogowych [21], s. 587.

---

<sup>7/</sup> *MRS* przedstawiona między innymi w monografiach [10], [17].

<sup>8/</sup> Metoda kolokacji jest szczególnym przypadkiem metody ortogonalizacyjnej Petrova, w której funkcje ortogonalizacyjne są dystrybucjami Diraca. Metoda ta została przedstawiona między innymi w monografii [18].

<sup>9/</sup> *MEB* przedstawiona między innymi w monografii [20].

Modele fizyczno-matematyczne podłoża gruntowego, opisujące w przybliżeniu zachowanie rzeczywistego ośrodka gruntowego, są tworzone już od 19-go wieku. Matematyczne modele opisywane są przez równania (więzy dwustronne) i nierówności (więzy jednostronne). W pracy [22] zaproponowano następujący podział modeli podłoża: stacjonarne i niestacjonarne, ciągłe i nieciągłe, jednowymiarowe, powierzchniowe, całkowalne i niecałkowalne, idealne i nieidealne, dwustronne i jednostronne, jednorodne i niejednorodne, izotropowe i anizotropowe, liniowe i nieliniowe.

Pierwszym modelem podłoża gruntowego był model Winklera [23]<sup>10/</sup>, opracowany w 1867 r., który, jak i inne modele, znalazł zastosowanie w zagadnieniach teorii belek, płyt i powłok spoczywających na podłożu gruntowym. W literaturze znajdujemy wiele prac dotyczących statyki oraz dynamiki belek i płyt spoczywających na podłożu Winklera<sup>11/</sup>.

W pracy [25] porównano modele Winklera, Pasternaka, Vlasova (przy założeniu hiperbolicznej funkcji zanikania przemieszczeń) i Kerra. Rozpatrzono zagadnienie dynamiki belek na podłożu Winklera w pracy [26]. W dalszych latach uogólnieniem i modyfikacją tego modelu zajmowało się wielu badaczy. Te uogólnienia polegały głównie na uwzględnieniu ścinania, efektów reologicznych oraz inercyjności podłoża.

W wyniku modyfikacji powstały takie modele jak: Filonenko-Borodiča [27], Vlasova [28], [29]<sup>12/</sup>, Wieghardta [30], Pasternaka [31], Hetenyiego [32], Żemočkina [33], Kelvina-Voigta i Maxwela, Reissnera [34], [35], Kerra [36], [37], Nogami i Lama [38], Jemielity [39], [40], Świtki [41] i innych. W 1960 r. Kandaurov [42] zaproponował model podłoża ziarnistego, składający się z ustawionych jednakowych prostopadłościanów, w taki sposób, aby szczeliny pionowe były przesunięte względem siebie w kolejnych warstwach (analogia z murem ceglanym).

W monografiach Gorbunova-Posadova [43], Żemočkina i Sinicyna [44], Korenieva i Rucimskiego [45] rozpatrywano belki i płyty spoczywające na różnych modelach podłoża.

W Załączniku 1 pt. „*Modele matematyczne podłoża sprężystego*” na podstawie pracy G. Jemielity i W. Szcześniaka [22], s. 5-48, przedstawiono różne modele podłoża.

---

<sup>10/</sup> Jest to typowy, a zarazem najprostszy, model fenomenologiczny.

<sup>11/</sup> W pracy Z. Kączkowskiego wyprowadzono równania płyty spoczywającej na dwuparametrowym podłożu Winklera [24], s. 53-54.

<sup>12/</sup> Model Vlasova został szczegółowo omówiony w Rozdziale 2.

Matematyczna złożoność trójwymiarowych strukturalnych modeli podłoża gruntowych w porównaniu z dwuwymiarowymi modelami strukturalnymi oraz analogowymi, możliwość wyznaczenia przemieszczeń, odkształceń i naprężeń na dowolnej głębokości podłoża, są przesłankami konstruowania modeli aproksymacyjnych, polegających na założeniu, że rozkład po głębokości wielkości mechanicznych, opisujących stan podłoża według trójwymiarowego modelu, są znane. „Dlatego też, modele matematyczne podłoża, bazujące na równaniach teorii sprężystości, tworzymy przyjmując przemieszczenia w postaci iloczynu funkcji dwóch zmiennych ze znanymi funkcjami jednej zmiennej, zwanymi funkcjami zanikania przemieszczeń” [21], s. 251.

Niezależnie od powyższych założeń, można przyjmować dodatkowe więzy na przemieszczenia równoległe do płaszczyzny ograniczającej podłoże. Takim przykładem więzów jest przyjęcie przez Vlasova zerowych przemieszczeń równoległych do płaszczyzny ograniczającej podłoże.

Najpopularniejszym modelem dwuparametrowego podłoża sprężystego jest model Vlasova<sup>13/</sup>, który do dziś stanowi podstawę dużej liczby prac naukowych [46]. Prace te głównie dotyczą szczególnych rozwiązań belek i płyt spoczywających na podłożu Vlasova. W zdecydowanej mniejszości podejmowano próby modyfikacji samego modelu podłoża. W przypadku belek i płyt spoczywających na podłożu Vlasova, w pracach [47], [48], [49] podejmowano próby wyznaczenia współczynnika zanikania przemieszczeń  $\gamma$ .

W pracy [47] porównano przemieszczenia swobodnej belki obciążonej skupionym momentem, spoczywającej na podłożu Winklera, Pasternaka i Vlasova. Podano też wzór na wyznaczenie współczynnika  $\gamma$  (wz.10).

Jones i Xenophontos w pracy [48] przedstawili wariacyjne wyprowadzenie równań dwuparametrowego modelu Vlasova. Przedstawiono również eksperymentalne badanie tego modelu oraz rozpatrywano płytę cienką na dwuparametrowym podłożu Vlasova. Autorzy podali związek między parametrem  $\gamma$ , charakteryzującym szybkość zanikania przemieszczeń wraz głębokością, a charakterystyką przemieszczenia (wz.17), ale nie zaproponowali metody obliczania jego rzeczywistej wartości. Taką metodę zaproponowali za Jonesem i Xenophontosem, Vallabhan i Das w pracy [50], w której opracowali metodę iteracyjną wyznaczenia parametru  $\gamma$ . Podobnie, parametr  $\gamma$  wyznaczył Teodoru w pracy [49]. Dla równomiernie rozłożonych obciążeń Vallabhan i Das stwierdzili, że parametr  $\gamma$  zależy między innymi od ilorazu głębokości warstwy do długości belki.

---

<sup>13/</sup> Popularność modelu Vlasova wynika z tego, że w łatwy sposób wyznacza się: analitycznie – dwa parametry podłoża i doświadczalnie – stałe  $E$  ( $G$ ) oraz  $\nu$ .

W pracy doktorskiej A. Turhana pt. „*A consistent Vlasov model for analysis of plates on elastic foundations using the finite element method*” [51], w rozdziale drugim „*Development of the theory of modified Vlasov model*”, korzystając z twierdzenia o minimum energii potencjalnej, wyprowadzone jest znane równania płyty cienkiej na podłożu Vlasova oraz za Straughanem [52] podano wzór na wyznaczenie współczynnika zanikania  $\gamma$ <sup>14/</sup>.

W pracy [53] rozpatrywano płytę okrągłą, spoczywającą na dwuparametrowym, poprzecznie izotropowym podłożu typu Vlasova (przy pominięciu przemieszczeń poziomych). Odpowiednie równania wyprowadzono korzystając z twierdzenia o minimum energii potencjalnej. Kolar i Nemiec w monografii [54] rozwiązali, za pomocą *MES* z elementami 3D, problem płyty na podłożu sprężystym Vlasova. Straughan w pracy doktorskiej „*Analysis of plates on elastic foundations*” [52], zastosował „zmodyfikowany” przez Vallabhana i Dasa, model podłoża Vlasova do analizy prostokątnych płyt na podłożu sprężystym. Ayvaz i Özgan w pracy [55] zastosowali dwuwarstwowy model podłoża Vlasova do analizy drgań własnych belki, obliczając charakterystyki podłoża na podstawie wyznaczonego przez autorów parametru  $\gamma$ . W pracy [56] Liu i Ma rozpatrywali model belki Eulera-Bernoulli’ego spoczywającej na podłożu Vlasova zakładając, że przemieszczenie poziome podłoża jest różne od zera. Takie podejście wyróżnia tę pracę wśród innych, ponieważ, w odróżnieniu od wiele innych prac, przyjęto bardziej ogólną hipotezę kinematyczną. W pracy [57] rozpatrywano belkę spoczywającą na podłożu Pasternaka, przy czym modyfikacja modelu Pasternaka dotyczyła na uwzględnieniu poziomych sprężyn, pozwalających na przenoszenie obciążeń stycznych.

Jednak autor rozprawy nie znalazł w literaturze prac dotyczących weryfikacji modelu Vlasova na podstawie teorii sprężystości. W monografii [29] weryfikowano, korzystając z rozwiązania Boussinesq’a, jedynie zagadnienie obciążenia warstwy na powierzchni siłą skupioną. Okazuje się, że większość prac dotyczących zagadnień fundamentów na podłożu sprężystym Vlasova bazuje na klasycznych założeniach Vlasova. Przeważnie rozpatrywano zagadnienia współpracy różnych fundamentów (belek bądź płyt) z podłożem, czasem z wyliczoną wartością współczynnika zanikania  $\gamma$ .

---

<sup>14/</sup> Autorzy prac [48], [49], [50], [51] i [52] piszą o zmodyfikowanym podłożu Vlasova. Zdaniem autora tej pracy jest to nazwa błędna. Model Vlasova nie został zmodyfikowany. Autorzy podali tylko pewien sposób określenia współczynnika  $\gamma$ , który zależy nie tylko od właściwości gruntu, ale też od rodzaju konstrukcji spoczywającej na gruncie. Podobnie, nie można mówić o zmodyfikowanym modelu Winklera, podając wzór na wyznaczenie współczynnika sztywności  $k$ .



W odróżnieniu od powyższych prac, w tej pracy wykonano weryfikację modelu podłoża Vlasova na podstawie rozwiązań ścisłych teorii sprężystości, a następnie jego modyfikacja. Zostanie też poświęcona uwaga modyfikacji funkcji zanikania przemieszczeń i jej wyznaczenia przy wykorzystaniu rozwiązań ścisłych liniowej teorii sprężystości.

Rozpatrywane w pracy modele mechaniczne podłoża gruntowego (dwuparametrowe oraz wieloparametrowe), bazują na liniowej teorii sprężystości. Główną uwagę poświęcono wyznaczeniu przemieszczeń wywołanych obciążeniem podłoża. Problematyka wyznaczenia naprężeń została pominięta ze względu na to, że w literaturze znajdujemy wiele prac dotyczących wyznaczeniu pól naprężeń. Weryfikacja modelu Vlasova, a także zmodyfikowanego modelu podłoża została wykonana na podstawie rozwiązań ścisłych teorii sprężystości warstwy sprężystej, obciążonej na powierzchni w kształcie koła i prostokąta.

## 1.2 Cel i zakres pracy

### Cel pracy

Celem pracy jest:

1. Weryfikacja modelu podłoża Vlasova dla wybranych przypadków obciążenia warstwy sprężystej na podstawie rozwiązań ścisłych teorii sprężystości.
2. Modyfikacja modelu podłoża Vlasova, polegająca na:
  - a) uwzględnieniu przemieszczeń stycznych do powierzchni ograniczającej podłoże,
  - b) założeniu, że ośrodek gruntowy jest poprzecznie izotropowy,
  - c) założeniu, że charakterystyki materiałowe, takie jak  $E$ ,  $\nu$  i  $G$ , są zmienne po głębokości warstwy.
3. Dobór parametrów sprężystości w zakresie małych i średnich odkształceń.

### Zakres pracy

Praca składa się ze wstępu, ośmiu rozdziałów poświęconych modelowaniu podłoży sprężystych, rozwiązaniom ścisłym teorii sprężystości, a także przybliżonych rozwiązań według modelu Vlasova oraz zmodyfikowanego modelu podłoża, podsumowania oraz dwóch załączników<sup>15/</sup>. Liczba rozdziałów wynika z konieczności wyodrębnienia zagadnień dotyczących modeli podłoży sprężystych oraz ich weryfikacji na podstawie teorii

---

<sup>15/</sup> Treści dane w załącznikach można traktować jako materiał szkoleniowy.

sprężystości. Poniżej zostanie przedstawiona krótka charakterystyka treści poszczególnych rozdziałów.

### *Rozdział 1. Wstęp.*

We wstępie przedstawiono podstawowe wiadomości o modelowaniu podłoża gruntowych, typy modeli mechanicznych podłoża, metody i problemy w modelowaniu matematycznym.

Uzasadniono wybór tematu pracy, zastosowanie ścisłych i przybliżonych metod analitycznych rozwiązywania układu równań przemieszczeniowych teorii sprężystości, nieliniowych właściwościach parametrów charakteryzujących sztywność gruntu, cel pracy, zakres pracy, a także oznaczenia stosowane w pracy.

### *Rozdział 2. Statyka warstwy gruntu według teorii Vlasova.*

W tym rozdziale, na podstawie monografii Vlasova i Leontieva [29] „*Belki i płyty na podłożu sprężystym*”, krótko przedstawiono przestrzenny oraz płaski model podłoża Vlasova. Opisano także główne założenia kinematyczne modelu Vlasova oraz metodę ortogonalizacji Galerkina równań przemieszczeniowych teorii sprężystości.

### *Rozdział 3. Przestrzenne zagadnienia teorii sprężystości.*

W tym rozdziale opisano rozwiązanie ściśle równań przemieszczeniowych teorii sprężystości wybranych przypadków obciążenia półprzestrzeni, warstwy, warstwy na półprzestrzeni oraz układu dwu warstw sprężystych, takich jak: obciążenia w kształcie koła i prostokąta. Omówiono rozwiązanie zagadnienia Boussinesq'a, mającego charakter rozwiązania fundamentalnego. Przedstawiono wykresy przemieszczeń półprzestrzeni, warstwy, warstwy na półprzestrzeni oraz układu dwóch warstw obciążanych na powierzchni.

Wykazano, że w przypadku półprzestrzeni obciążonej w kształcie prostokąta o wymiarach  $2a \times 2b$  istnieje zależność pomiędzy maksymalnym przemieszczeniem a przemieszczeniami na środku boku oraz w narożu tego prostokąta.

### *Rozdział 4. Rozwiązania przybliżone wybranych przypadków obciążenia warstwy sprężystej.*

W rozdziale tym przedstawiono przybliżone wzory na wyznaczenie maksymalnych przemieszczeń pionowych warstwy o dowolnej miąższości, obciążonej na powierzchni w kształcie koła lub prostokąta. Przybliżone wzory uzyskano korzystając z rozwiązań ścisłych dla półprzestrzeni i warstwy sprężystej.

Przedstawiono propozycję przyjęcia funkcji zanikania przemieszczeń wraz z głębokością. Zaproponowano zmodyfikowane funkcje zanikania przemieszczeń typu

Vlasova, a także funkcje zanikania, bazujące na rozwiązaniu ścisłym teorii sprężystości dla półprzestrzeni sprężystej.

#### *Rozdział 5. Weryfikacja modelu podłoża Vlasova.*

W tym rozdziale przedstawiono weryfikację modelu podłoża Vlasova, polegającą na porównaniu rozwiązań ścisłych teorii sprężystości z rozwiązaniami, uzyskanymi według modelu Vlasova dla wybranych przypadków obciążenia warstwy sprężystej, takich jak: obciążenie w kształcie koła oraz prostokąta.

#### *Rozdział 6. Zmodyfikowany model podłoża.*

W rozdziale tym przedstawiono zmodyfikowany model podłoża, uwzględniający poprzeczną izotropię i niejednorodność po głębokości rozpatrywanego ośrodka, a także uwzględnieniu trzech niezerowych składowych wektora przemieszczenia. Zaproponowano opis niejednorodnego, poprzecznie izotropowego ośrodka poprzez wielkości stałe i funkcje zmienne po głębokości warstwy.

Przedstawiono modele zmodyfikowanego podłoża gruntowego, otrzymywane wprowadzeniem różnych założeń kinematycznych lub fizycznych. Zmodyfikowane modele podłoża zostały wyprowadzone w kartezjańskim oraz w walcowym układzie współrzędnych.

Przedstawiono zmodyfikowany dwuparametrowy model podłoża Vlasova, uwzględniający poprzeczną izotropię ośrodka oraz zmienność po głębokości warstwy charakterystyk materiałowych.

#### *Rozdział 7. Weryfikacja zmodyfikowanego modelu podłoża.*

W tym rozdziale przedstawiono weryfikację zmodyfikowanego modelu podłoża na podstawie teorii sprężystości dla poprzecznie izotropowej warstwy, obciążonej na powierzchni w kształcie prostokąta oraz koła, a także porównanie zmodyfikowanego modelu podłoża z modelem Vlasova.

Rozpatrzono zagadnienie obciążenia warstwy sprężystej, w której charakterystyki materiałowe są stałe po głębokości oraz zmienne w sposób liniowy (podłoża gradientowe), a także skokowy. Porównano przypadek obciążenia w kształcie koła o promieniu  $a$ , działającego na warstwę sprężystą i układ dwu warstw o sztywności zmiennej po głębokości.

#### *Rozdział 8. Dobór parametrów sztywności.*

W tym rozdziale rozpatrzono dobór parametrów sprężystości w celu wyznaczenia wartości przemieszczeń uwzględniając nieliniowość rozkładu modułu odkształcenia w zakresie małych i średnich odkształceń. Przedstawiono czynniki określające zależność

naprężenie-odkształcenie w gruncie, sztywność początkową, wyznaczaną na podstawie pomiaru prędkości fali poprzecznej lub za pomocą kolumny rezonansowej, nieliniowy rozkład sztywności gruntu, możliwości aparaturowe określania sztywności ze względu na zakres odkształcenia, charakterystyki progowych stref odkształcenia, a także uwarunkowania rozkładu sztywności w zakresie małych i średnich odkształceń. Zaproponowano dobór reprezentatywnej wartości sztywności gruntu dla rozpatrywanego zakresu odkształceń.

#### *Rozdział 9. Podsumowanie i wnioski.*

W rozdziale tym przedstawiono podsumowanie oraz ogólne wnioski dotyczące rozwiązań ścisłych teorii sprężystości dla wybranych przypadków obciążenia warstwy sprężystej, weryfikacji i modyfikacji modelu podłoża Vlasova podłoża.

### **1.3 Hipoteza badawcza**

Istnieje możliwość modyfikacji i uogólnienia założeń modelu podłoża Vlasova, polegających na uwzględnieniu:

- 1) trzech niezerowych składowych wektora przemieszczenia;
- 2) zmienności sztywności gruntu w kierunku prostopadłym do płaszczyzny ograniczającej warstwę;
- 3) poprzecznej izotropii ośrodka.

### **1.4 Oznaczenia<sup>16/</sup>**

W pracy zastosowano zapis indeksowy lub macierzowy. Równania i wzory zapisano korzystając z notacji wskaźnikowej<sup>17/</sup>. Wskaźniki łacińskie  $i, j, k$  przebiegają ciąg 1, 2, 3 i odnoszą się do prostokątnego układu współrzędnych kartezjańskich  $\{x_1, x_2, x_3\}$  parametryzującego przestrzeń, w której znajduje się rozpatrywana warstwa (przestrzeń fizyczna). Wskaźniki greckie  $\alpha, \beta$  przebiegają ciąg 1, 2 i dotyczą parametrów powierzchni podstawowej. Korzystano też z układu współrzędnych walcowych  $\{r, \varphi, z\}$ . Część przestrzeni, w której znajduje się rozpatrywana warstwa, parametryzowano za pomocą kartezjańskiego, prawoskrętnego układu współrzędnych. Współrzędne punktów oznaczamy przez  $x_i$  lub  $x_\alpha$ .

---

<sup>16/</sup> Przyjęto oznaczenia proponowane w monografii [58].

<sup>17/</sup> Jeżeli nie wskazano inaczej.

Konwencja sumacyjna (sumowanie według wskaźnika powtarzającego się dwukrotnie) obowiązuje wobec wyżej wymienionych wskaźników (jeżeli nie wskazano inaczej). W szczególnych przypadkach odejście od konwencji sumacyjnej jest wtedy, gdy jeden ze wskaźników jest podkreślony. Przykładowo:  $f_{\alpha\alpha}=f_{11}+f_{22}$ , ale  $f_{\underline{\alpha\alpha}}$  dla  $\alpha=1$  wynosi  $f_{11}$ , a dla  $\alpha=2$  wynosi  $f_{22}$ .

Wartości przemieszczeń, w przypadku trójwymiarowego zagadnienia, są funkcjami współrzędnych prostokątnych  $\{x_1, x_2, x_3\}$ ,  $u_i = u_i(x_k)$ . Natomiast w przypadku dwuwymiarowego zagadnienia, wektory przemieszczeń są funkcjami współrzędnych prostokątnych  $\{x_1, x_2\}$ ,  $u_\alpha = u_\alpha(x_\beta)$ .

Dla bardziej wygodnego zapisu, przy przejściu do konkretnych przykładów, współrzędną  $x_1$  będziemy oznaczać literą  $x$ , współrzędną  $x_2$  – literą  $y$ , natomiast współrzędną  $x_3$  – literą  $z$ .

Pochodną cząstkową oznaczono przecinkiem poprzedzającym odpowiedni wskaźnik, np.  $u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ . Jeżeli funkcja zależy tylko od jednej zmiennej, pochodną ozna-

czono  $\frac{\partial(\quad)}{\partial x_3} = (\quad)'$ .

Również w pracy zastosowano następujące oznaczenia:

TS – teoria sprężystości,

PSO – płaski stan odkształcenia,

MV – model Vlasova,

ZMV – zmodyfikowany model Vlasova,

FV – funkcje Vlasova,

ZMV – zmodyfikowane funkcje Vlasova.

## 2. STATYKA WARSTWY GRUNTU WEDŁUG TEORII VLASOVA

### 2.1 Cel rozdziału

Celem tego rozdziału jest przedstawienie modelu podłoża sprężystego Vlasova, zaproponowanego w monografii [29]. W odróżnieniu od Vlasova i Leontieva, gdzie równania modelu podłoża otrzymano stosując zasadę prac wirtualnych, równania w tej pracy otrzymane na podstawie ortogonalizacji równań równowagi teorii sprężystości sposobem Galerkina. Przedmiotem rozważań jest warstwa sprężysta o miąższości  $H$ , obciążona prostopadłe do płaszczyzny ograniczającej tę warstwę.

### 2.2 Przestrzenny stan odkształcenia

W monografii [29] rozpatrywana jest warstwa gruntu o miąższości  $H$ , znajdująca się w przestrzennym stanie odkształcenia (rys.2.1), przy założeniu, że poszukiwane przemieszczenia można przedstawić w następującej postaci<sup>18/</sup>

$$u_i(x_k) = \sum_{s=1}^{n_i} u_{is}(x_a) \psi_{is}(x_3) = u_{is}(x_a) \psi_{is}(x_3), \quad (2.1)$$

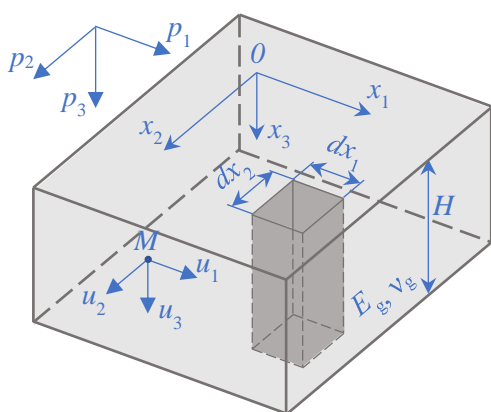
gdzie:

$i, k=1, 2, 3, \alpha=1, 2, s=1, 2, 3, \dots, n_i$ ,

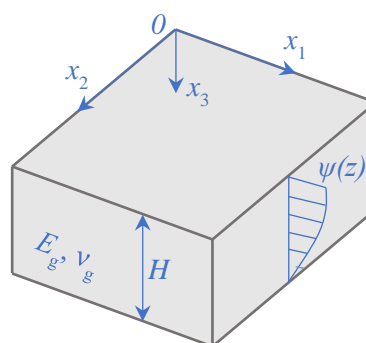
$M=M(x_k)$  – rozpatrywany punkt materialny ośrodka sprężystego,

$u_i=u_i(x_k)$  – składowe wektora przemieszczenia punktu  $M$ ,

$p_i=p_i(x_a)$  – składowe wektora obciążenia powierzchniowego.



Rys.2.1. Warstwa sprężysta<sup>19/</sup>.



Rys.2.2. Rozkład przemieszczeń po głębokości<sup>20/</sup>.

<sup>18/</sup> Przemieszczenia zapisujemy stosując konwencję sumacyjną. Wskaźnik podkreślony nie podlega sumowaniu.

<sup>19/</sup> Rysunek własny na podstawie monografii [29], s. 50.

<sup>20/</sup> Rysunek własny na podstawie monografii [29], s. 56.

Zakładamy, że bezwymiarowe funkcje  $\psi_{is}(x_3)$ , charakteryzujące zanikanie przemieszczeń  $u_i(x_k)$  po głębokości warstwy, są znane (rys.2.2), przy czym

$$\psi_{is}(0) = 1, \quad \psi_{is}(H) = 0. \quad (2.2)$$

Naprężenia  $\sigma_{ij}$  zapiszemy następująco

$$\sigma_{ij}(x_k) = \frac{E_0}{1-\nu_0^2} \left( \frac{1-\nu_0}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) + \nu_0 u_{k,k} \delta_{ij} \right), \quad (2.3)$$

gdzie  $i, j, k = 1, 2, 3$ .

We wzorze (2.3) wielkości  $E_0$  i  $\nu_0$  wyrażają się następująco [29], s. 22:

$$E_0 = \frac{E_g}{1-\nu_g^2}, \quad \nu_0 = \frac{\nu_g}{1-\nu_g}, \quad (2.4)$$

gdzie:

$E_g, \nu_g$  – odpowiednio moduł Younga i współczynnik Poissona podłoża.

Przy pominięciu sił masowych, warunki równowagi

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (2.5)$$

spełniono stosując ortogonalizację Galerkina, otrzymując skomplikowany układ równań różniczkowych na funkcje  $u_{is}(x_\alpha)$ , który podano w monografii [29], s. 53, wzór 6.7.

Równania dwuparametrowego podłoża Vlasova są wyprowadzone przy założeniu, że przemieszczenia poziome  $u_1$  oraz  $u_2$  są równe zeru.

W przypadku szczególnym  $n_i = 1$  oraz:

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2, x_3) &= 0, \quad u_2(x_1, x_2, x_3) = 0, \\ u_3(x_1, x_2, x_3) &= w(x_1, x_2) \psi(x_3), \end{aligned} \quad (2.6)$$

otrzymujemy następujące równanie różniczkowe modelu podłoża sprężystego

$$a_1 \frac{E_0}{2(1+\nu_0)} \nabla^2 w - b_1 \frac{E_0}{1-\nu_0^2} w + p_3 = 0, \quad (2.7)$$

lub

$$k_2 \nabla^2 w - k_1 w + p_3 = 0, \quad (2.8)$$

gdzie:

$w = w(x_1, x_2)$  – poszukiwana funkcja przemieszczeń,  $[m]$ ,

$p_3 = p_3(x_1, x_2)$  – obciążenie powierzchniowe, prostopadłe do płaszczyzny ograniczającej warstwę,  $[Nm^{-2}]$ ,

$$k_1 = \frac{E_0}{1-\nu_0^2} b_1, \quad k_2 = \frac{E_0}{2(1+\nu_0)} a_1, \quad (2.9)$$

$$a_1 = \int_0^H \psi^2(z) dz, \quad b_1 = \int_0^H \left( \frac{d\psi(z)}{dz} \right)^2 dz. \quad (2.10)$$

Zauważmy, że współczynnik  $a_1$  ma wymiar długości [m],  $b_1$  zaś [ $m^{-1}$ ], natomiast parametry całkowe  $k_1$  i  $k_2$  mają wymiary odpowiednio [ $Nm^{-3}$ ] i [ $Nm^{-1}$ ].

Równanie (2.8) można traktować jako model podłoża o dwóch parametrach całkowych  $k_1$  i  $k_2$ , opisujący zachowanie warstwy gruntowej, obciążonej na powierzchni wyłącznie obciążeniem  $p_3$ .

Uogólnione siły podłużne  $N(x_1, x_2)$  oraz poprzeczne  $T(x_1, x_2)$  wyznaczymy ze wzorów:

$$N(x_1, x_2) = \int_0^H \sigma_{xx} \psi(z) dz, \quad T(x_1, x_2) = \int_0^H \sigma_{xz} \psi(z) dz. \quad (2.11)$$

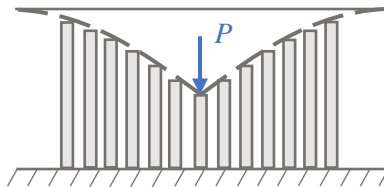
Wyrażając naprężenia ze wzorów na siły poprzeczne (2.11) poprzez przemieszczenia (2.6), otrzymamy:

$$N(x_1, x_2) = k_3 w(x_1, x_2), \quad T(x_1, x_2) = k_2 \frac{\partial w}{\partial x}, \quad (2.12)$$

gdzie oznaczono

$$k_3 = \frac{\nu_0 E_0}{1-\nu_0^2} \int_0^H \psi(z) \frac{d\psi(z)}{dz} dz = -\frac{\nu_0 E_0}{2(1-\nu_0^2)}. \quad (2.13)$$

Równanie różniczkowe (2.8) opisuje przestrzenny model podłoża sprężystego przy założeniu, że przemieszczenia poziome są równe zero. Schematycznie ten model można przedstawić jako układ sprężyn, między którymi wynikają wewnętrzne siły tarcia. Taki model Vlasov nazywa modelem podłoża sprężystego o dwóch parametrach  $k$  i  $t^{21}$ .



Rys.2.3. Schemat modelu podłoża Vlasova<sup>22/</sup>.

Należy także zaznaczyć, że w monografii [21], s. 252-256, rozpatrywano model podłoża typu Vlasova, bazujący na niejednorodnym (względem  $x, y, z$ ) modelu podłoża

<sup>21/</sup> W monografii [29] przyjęto oznaczenia:  $k=k_1, 2t=k_2$ .

<sup>22/</sup> Rysunek własny na podstawie monografii [29], s. 25.



lepko-sprężystego Kelvina-Voigta. Korzystając z zasady prac wirtualnych, dla warstwy o kształcie cylindrycznym podano równanie modelu podłoża lepko-sprężystego, w którym charakterystyki materiałowe są funkcjami zmiennych przestrzennych.

### 2.3 Płaski stan odkształcenia

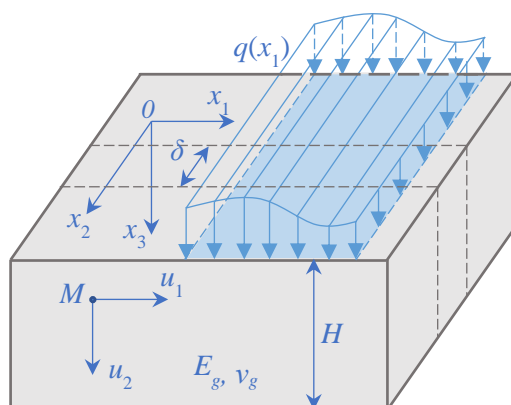
W monografii [29] również rozpatrywana jest warstwa gruntowa, znajdująca się w płaskim stanie odkształcenia (rys.2.4). Przemieszczenia zapiszemy następująco:

$$u_1(x_1, x_2) = \sum_{s=1}^{n_1} u_{1s}(x_1) \psi_{1s}(x_2), \quad u_3(x_1, x_2) = \sum_{s=1}^{n_3} u_{3s}(x_1) \psi_{3s}(x_2). \quad (2.14)$$

Warunki równowagi

$$\begin{cases} \sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} = 0, \\ \sigma_{21,1} + \sigma_{22,2} = 0, \end{cases} \quad (2.15)$$

spełniono stosując ortogonalizację Galerkiną, otrzymując układ równań różniczkowych na funkcje  $u_{1s}(x_1)$  oraz  $u_{3s}(x_1)$ , który podano w monografii [29], s. 18, wzór 1.10.



Rys.2.4. Warstwa gruntu znajdująca się w PSO<sup>23/</sup>.

W przypadku szczególnym dla  $n_1=n_2=1$ , przy oznaczeniach:

$$u_1(x_1, x_2) = 0, \quad u_2(x_1, x_2) = w(x_1) \psi(x_2), \quad (2.16)$$

otrzymujemy jedno równanie różniczkowe o postaci (por. wz.(2.7))

$$a_1 \frac{E_0}{2(1+\nu_0)} \frac{d^2 w}{dx_1^2} - b_1 \frac{E_0}{1-\nu_0^2} w + p_3 = 0, \quad (2.17)$$

lub (por. wz.(2.8))

$$k_2 \frac{d^2 w}{dx_1^2} - k_1 w + p_3 = 0, \quad (2.18)$$

<sup>23/</sup> Rysunek własny na podstawie monografii [29], s. 22.

gdzie:

$$k_1 = \frac{\delta E_0 b_1}{1 - \nu_0^2}, \quad k_2 = \frac{\delta E_0 a_1}{2(1 + \nu_0)}, \quad (2.19)$$

$w=w(x_1)$  – poszukiwana funkcja przemieszczeń pionowych, [m],

$\delta$  – szerokość wyciętego paska (rys.2.4), [m].

Parametry całkowe  $a_1$  i  $b_1$  występujące w formułach (2.19) są podane wzorami (2.10). Uogólnione siły podłużne  $N(x_1)$  oraz poprzeczne  $T(x_1)$  wyznaczmy ze wzorów (2.12).

Równanie różniczkowe (2.18) opisuje model podłoża sprężystego znajdującego się w płaskim stanie odkształcenia przy założeniu, że przemieszczenia poziome są równe zero. Właściwości tego modelu zależą od dwóch parametrów całkowych  $k_1$  i  $k_2$ .

Model podłoża o dwóch parametrach  $k_1$  i  $k_2$  jest najprostszym modelem podłoża sprężystego, otrzymanego na podstawie ortogonalizacji równań równowagi teorii sprężystości, wyrażonych w przemieszczeniach.

W dalszej części pracy dla warstwy poddanej na powierzchni obciążeniu w kształcie koła oraz prostokąta przedstawiono porównanie przemieszczeń pionowych, otrzymanych według modelu podłoża Vlasova, z rozwiązaniem ścisłym teorii sprężystości.

### 3. PRZESTRZENNE ZAGADNIENIA TEORII SPRĘŻYSTOŚCI

#### 3.1 Cel rozdziału

W tym rozdziale omówiono rozwiązanie zagadnień wybranych przypadków obciążeń ośrodków izotropowych (półprzestrzeni, warstwy, warstwy na półprzestrzeni, a także dwóch warstw sprężystych), znajdujących się w przestrzennych warunkach naprężeniowo-odkształceniowych.

Równania przemieszczeniowe, przy braku sił masowych, zapiszemy w postaci

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} = 0, \quad (3.1)$$

gdzie:  $i, j=1, 2, 3$ ,

a stałe Lamego  $\lambda, \mu$  wyrażone są wzorami:

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{2G\nu}{1-2\nu}, \quad (3.2)$$

w których  $E$  – moduł Younga,  $G$  – moduł Kirchhoffa,  $\nu$  – współczynnik Poissona.

Zauważmy, że w przypadku, gdy  $\lambda = \mu$ , współczynnik Poissona jest równy  $\nu = 1/4$ .

Do rozwiązania układu równań przemieszczeniowych (3.1) najbardziej znanymi są przedstawienia wektora przemieszczenia  $\mathbf{u}$  w postaciach [11]:

- 1) Trefftza:  $u_i = \varphi_i + x_3 \chi_i, \quad \nabla^2 \varphi_i = 0, \quad \nabla^2 \chi_i = 0;$
- 2) Papkowicza-Neubera:  $u_i = \varphi_i + (x_j \psi_i)_{,i} - 4(1-\nu)\psi_i;$
- 3) Galerkina:  $u_i = (1+k)\nabla^2 F_i - kF_{j,ji};$
- 4) Love'a:  $u_r = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial r \partial z}, \quad u_z = \left(1 + \frac{1}{k}\right) \nabla^2 \chi - \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2}.$

Otrzymanie analitycznego rozwiązania równań przemieszczeniowych teorii sprężystości w niektórych przypadkach można uzyskać stosując<sup>24/</sup>:

- całkowite przekształcenia Fouriera oraz Hankela<sup>25/</sup>,
- rozwiązanie w wielomianach,
- szeregi trygonometryczne<sup>26/</sup>,
- funkcje zmiennej zespolonej.

---

<sup>24/</sup> Analityczne metody rozwiązywania równań teorii sprężystości są podane między innymi w pracach [11], [12], [59], [60], [61], [62], [63], [64], [65], [66], [67], [68].

<sup>25/</sup> Przekształcenia całkowite Fouriera oraz Hankela przedstawiono między innymi w monografiach [69], [70], [71], [72], [73].

<sup>26/</sup> Zastosowanie szeregów Fouriera do rozwiązywania równań różniczkowych przedstawiono między innymi w monografii [74].

Możliwości konstruowania dokładnych rozwiązań oraz otrzymania końcowych wzorów analitycznych poszukiwanych wielkości według teorii sprężystości są ograniczone. Zarówno w przypadku zagadnień przestrzennych, jak i płaskich, ściśle rozwiązania można uzyskać metodami opisanymi powyżej tylko dla obszarów o geometrycznie prostych granicach, a najczęściej tylko dla przestrzeni i półprzestrzeni [12], s. 127.

Część z omówionych poniżej zagadnień ma charakter rozwiązań fundamentalnych (na przykład zagadnienie Boussinesq'a). Te rozwiązania mają charakter praktyczny, stanowiący podstawę do znajdowania innych rozwiązań.

### 3.2 Wybrane zagadnienia obciążenia półprzestrzeni sprężystej

Wśród rozwiązań szczególnych układu równań (3.1) na specjalną uwagę zasługują *rozwiązania fundamentalne*, odpowiadające działaniu sił skupionych w nieskończonym obszarze sprężystym, przy użyciu których można uzyskać rozwiązania dla obszaru skończonego, stosując wzory Somigliany<sup>27/</sup> oraz Greena [11], s. 160.

W tym podrozdziale omówiono rozwiązanie zagadnienia Boussinesq'a (półprzestrzeń sprężysta obciążona na powierzchni normalną siłą skupioną) oraz szereg rozwiązań dla innych przypadków obciążenia półprzestrzeni, otrzymanych na podstawie rozwiązania zagadnienia Boussinesq'a.

#### 3.2.1 Zagadnienie Boussinesq'a<sup>28/</sup>

Zagadnienie Boussinesq'a, jak wspomniano wyżej, należy do tak zwanych *rozwiązań fundamentalnych*. Ze względu na to, że rozwiązania tego zagadnienia jest przedstawione w wielu pracach różnych autorów, przedstawimy go krótko.

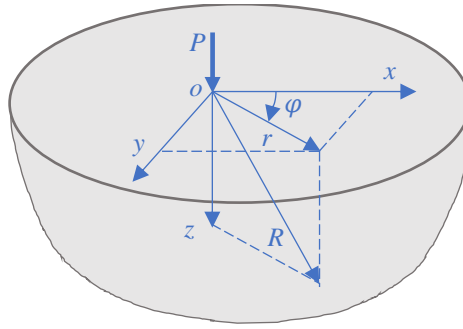
Rozpatrzmy półprzestrzeń sprężystą  $x_3 > 0$  obciążaną w początku układu współrzędnych siłą skupioną  $p_3 = P\delta(x)\delta(y)$  skierowaną wzdłuż osi  $z$  (rys.3.1). Wprowadźmy następujące oznaczenia współrzędnych przestrzennych oraz składowych wektora przemieszczenia:

$$\begin{aligned} x_1 &= x, & x_2 &= y, & x_3 &= z, \\ u_1 &= u, & u_2 &= v, & u_3 &= w, \end{aligned} \tag{3.3}$$

przy czym:  $u = u(x, y, z)$ ,  $v = v(x, y, z)$ ,  $w = w(x, y, z)$ .

<sup>27/</sup> Dokładniej o wzorach Somigliany patrz [67], s. 133.

<sup>28/</sup> Opracowano na podstawie monografii [11], s. 199, [61], s. 43.



Rys.3.1. Półprzestrzeń obciążona siłą skupioną.

Przemieszczenia wyznaczmy ze wzorów [11], s. 201:

$$u = \frac{Px}{4\pi\mu R} \left( \frac{z}{R^2} - \frac{1-2\nu}{R+z} \right), \quad v = \frac{Py}{4\pi\mu R} \left( \frac{z}{R^2} - \frac{1-2\nu}{R+z} \right),$$

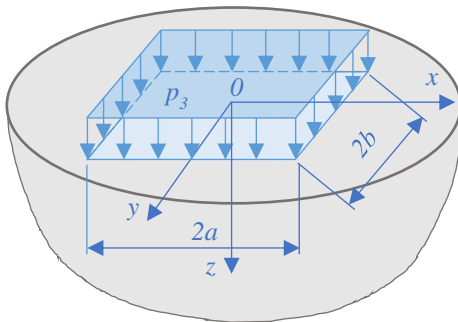
$$w = \frac{P}{4\pi\mu R} \left( \frac{z^2}{R^2} + 2(1-\nu) \right),$$
(3.4)

gdzie:  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $R = \sqrt{r^2 + z^2}$ .

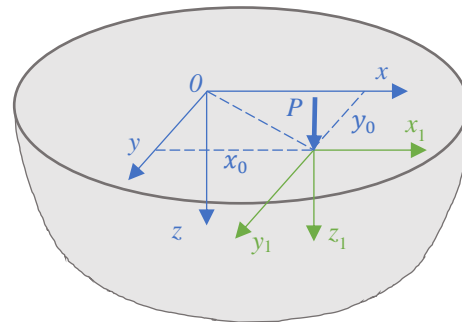
Wzory (3.4) pozwalają wyznaczyć poziome oraz pionowe przemieszczenia ośrodka sprężystego dla dowolnych zmiennych przestrzennych  $x, y, z$ .

### 3.2.2 Półprzestrzeń obciążona równomiernie na powierzchni prostokąta

Rozpatrzmy półprzestrzeń sprężystą obciążoną równomiernie na powierzchni prostokąta o wymiarach  $2a \times 2b$  (rys.3.2).



Rys.3.2. Półprzestrzeń poddana obciążeniu w kształcie prostokąta.



Rys.3.3. Półprzestrzeń obciążona na powierzchni siłą skupioną.

Rozwiązanie tego zagadnienia otrzymamy na podstawie rozwiązania zagadnienia Boussinesq'a, traktując wzory (3.4) jako funkcje Greena. W tym celu należy przenieść siłę skupioną  $P$  w dowolny punkt ciała o współrzędnych  $\{x_0, y_0\}$  (rys.3.3).

W przypadku obciążenia powierzchniowego o kształcie prostokąta, należy wykonać całkowanie funkcji przemieszczeń (3.4) w układzie współrzędnych  $\{Ox_1, y_1, z_1\}$ .

Wzory na przemieszczenia równoległe do płaszczyzny ograniczającej półprze-  
strzeń  $u(x,y)$ ,  $v(x,y)$  oraz przemieszczenia prostopadłe do niej  $w(x,y)$  zapiszemy następu-  
jąco:

$$\begin{aligned} u &= \frac{(1+\nu)p}{2\pi E} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \frac{x-x_0}{R} \left( \frac{z}{R^2} - \frac{1-2\nu}{R+z} \right) dx_0 dy_0, \\ v &= \frac{(1+\nu)p}{2\pi E} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \frac{y-y_0}{R} \left( \frac{z}{R^2} - \frac{1-2\nu}{R+z} \right) dx_0 dy_0, \\ w &= \frac{(1+\nu)p}{2\pi E} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \frac{1}{R} \left[ 2(1-\nu) + \frac{z}{R^2} \right] dx_0 dy_0, \end{aligned} \quad (3.5)$$

gdzie  $R = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2}$ .

Wprowadzając współrzędne bezwymiarowe:

$$x = \xi a, \quad y = \eta b, \quad z = \zeta a, \quad x_0 = \xi_0 a, \quad y_0 = \eta_0 b, \quad b = \kappa a, \quad (3.6)$$

formuły (3.5) zapiszemy następująco:

$$\begin{aligned} u &= \frac{(1+\nu)pa}{2\pi E} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\xi - \xi_0}{\hat{R}} \left( \frac{\zeta}{\hat{R}^2} - \frac{1-2\nu}{\hat{R} + \zeta} \right) d\xi_0 d\eta_0, \\ v &= \frac{(1+\nu)pa}{2\pi E} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\eta - \eta_0}{\hat{R}} \left( \frac{\zeta}{\hat{R}^2} - \frac{1-2\nu}{\hat{R} + \zeta} \right) d\xi_0 d\eta_0, \\ w &= \frac{(1+\nu)pa}{2\pi E} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{\hat{R}} \left[ \frac{\zeta}{\hat{R}^2} + 2(1-\nu) \right] d\xi_0 d\eta_0, \end{aligned} \quad (3.7)$$

gdzie  $\hat{R} = \sqrt{(\xi - \xi_0)^2 + \kappa^2 (\eta - \eta_0)^2 + \zeta^2}$ .

Całkowanie funkcji przemieszczeń (3.7) zostało wykonane w programie *Wolfram Mathematica 8*<sup>29/</sup>. Należy zaznaczyć, że wygodniej jest najpierw wyznaczyć całkę ogólną wzorów (3.7), a następnie podstawić granice całkowania.

Wykonując całkowanie funkcji przemieszczeń (3.7), otrzymamy następujące wzory na przemieszczenia  $u(\xi, \eta, \zeta)$ ,  $v(\xi, \eta, \zeta)$ ,  $w(\xi, \eta, \zeta)$ , zależne od parametru  $\kappa = b/a$ :

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{ap}{E} \hat{u}(\xi, \eta, \zeta), \quad v(\xi, \eta, \zeta) = \frac{ap}{E} \hat{v}(\xi, \eta, \zeta), \\ w(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{ap}{E} \hat{w}(\xi, \eta, \zeta), \end{aligned} \quad (3.8)$$

<sup>29/</sup> W przypadku całkowania funkcji przemieszczeń (3.7), w zależności od wersji *Wolfram Mathematica*, przy całkowaniu program posługuje się różnymi, ale równoważnymi funkcjami, dającymi takie same wyniki.

gdzie:

$$\begin{aligned}
\hat{u}(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2\pi} \left[ \hat{f}_u(\xi, \eta, \zeta) + \hat{g}_u(\xi, \eta, \zeta) \right], \\
\hat{v}(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2\pi} \left[ \hat{f}_v(\xi, \eta, \zeta) + \hat{g}_v(\xi, \eta, \zeta) \right], \\
\hat{w}(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2\pi} \left[ -\zeta \hat{f}_w(\xi, \eta, \zeta) + \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \hat{g}_w(\xi, \eta, \zeta) \right],
\end{aligned} \tag{3.9}$$

natomiast:

$$\begin{aligned}
\hat{f}_u(\xi, \eta, \zeta) &= (1-\xi) \left[ \arctan\left(\frac{\kappa(1-\eta)}{1-\xi}\right) + \arctan\left(\frac{\kappa(1+\eta)}{1-\xi}\right) \right] - \\
&(1+\xi) \left[ \arctan\left(\frac{\kappa(1-\eta)}{1+\xi}\right) + \arctan\left(\frac{\kappa(1+\eta)}{1+\xi}\right) \right] - \\
&(1-\xi) \arctan\left(\frac{\kappa\zeta(1+\eta)}{(1-\xi)\sqrt{(1-\xi)^2 + \kappa^2(1+\eta)^2 + \zeta^2}}\right) - \\
&(1-\xi) \arctan\left(\frac{\kappa\zeta(1-\eta)}{(1-\xi)\sqrt{(1-\xi)^2 + \kappa^2(1-\eta)^2 + \zeta^2}}\right) + \\
&(1+\xi) \arctan\left(\frac{\kappa\zeta(1+\eta)}{(1+\xi)\sqrt{(1+\xi)^2 + \kappa^2(1+\eta)^2 + \zeta^2}}\right) + \\
&(1+\xi) \arctan\left(\frac{\kappa\zeta(1-\eta)}{(1+\xi)\sqrt{(1+\xi)^2 + \kappa^2(1-\eta)^2 + \zeta^2}}\right),
\end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}
\hat{g}_u(\xi, \eta, \zeta) &= (1-\eta) \kappa \ln\left(\frac{\zeta + \sqrt{(1-\xi)^2 + \kappa^2(1-\eta)^2 + \zeta^2}}{\zeta + \sqrt{(1+\xi)^2 + \kappa^2(1-\eta)^2 + \zeta^2}}\right) + \\
&(1+\eta) \kappa \ln\left(\frac{\zeta + \sqrt{(1-\xi)^2 + \kappa^2(1+\eta)^2 + \zeta^2}}{\zeta + \sqrt{(1+\xi)^2 + \kappa^2(1+\eta)^2 + \zeta^2}}\right) + \\
&\frac{2\zeta(1-\nu)}{1-2\nu} \ln\left(\frac{\kappa(1+\eta) + \sqrt{(1-\xi)^2 + \kappa^2(1+\eta)^2 + \zeta^2}}{\kappa(1+\eta) + \sqrt{(1+\xi)^2 + \kappa^2(1+\eta)^2 + \zeta^2}}\right) + \\
&\frac{2\zeta(1-\nu)}{1-2\nu} \ln\left(\frac{\sqrt{(1+\xi)^2 + \kappa^2(1-\eta)^2 + \zeta^2} - \kappa(1-\eta)}{\sqrt{(1-\xi)^2 + \kappa^2(1-\eta)^2 + \zeta^2} - \kappa(1-\eta)}\right),
\end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}
\hat{f}_v(\xi, \eta, \zeta) &= (1-\eta)\kappa \left[ \operatorname{arccot}\left(\frac{\kappa(1-\eta)}{1-\xi}\right) - \operatorname{arccot}\left(-\frac{\kappa(1-\eta)}{1+\xi}\right) \right] - \\
&(1+\eta)\kappa \left[ \arctan\left(\frac{1-\xi}{\kappa(1+\eta)}\right) + \arctan\left(\frac{1+\xi}{\kappa(1+\eta)}\right) \right] - \\
&(1-\eta)\kappa \arctan\left(\frac{\zeta(1-\xi)}{(1-\eta)\kappa\sqrt{(1-\xi)^2 + (1-\eta)^2\kappa^2 + \zeta^2}}\right) - \\
&(1-\eta)\kappa \arctan\left(\frac{\zeta(1+\xi)}{(1-\eta)\kappa\sqrt{(1+\xi)^2 + (1-\eta)^2\kappa^2 + \zeta^2}}\right) + \\
&(1+\eta)\kappa \arctan\left(\frac{\zeta(1-\xi)}{(1+\eta)\kappa\sqrt{(1-\xi)^2 + (1+\eta)^2\kappa^2 + \zeta^2}}\right) + \\
&(1+\eta)\kappa \arctan\left(\frac{\zeta(1+\xi)}{(1+\eta)\kappa\sqrt{(1+\xi)^2 + (1+\eta)^2\kappa^2 + \zeta^2}}\right),
\end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}
\hat{g}_v(\xi, \eta, \zeta) &= (1-\xi) \ln\left(\frac{\zeta + \sqrt{(1-\xi)^2 + (1-\eta)^2\kappa^2 + \zeta^2}}{\zeta + \sqrt{(1-\xi)^2 + (1+\eta)^2\kappa^2 + \zeta^2}}\right) + \\
&(1+\xi) \ln\left(\frac{\zeta + \sqrt{(1+\xi)^2 + (1-\eta)^2\kappa^2 + \zeta^2}}{\zeta + \sqrt{(1+\xi)^2 + (1+\eta)^2\kappa^2 + \zeta^2}}\right) - \\
&\frac{2\zeta(1-\nu)}{1-2\nu} \ln\left(\frac{\sqrt{(1-\xi)^2 + (1-\eta)^2\kappa^2 + \zeta^2} + \xi - 1}{\sqrt{(1-\xi)^2 + (1+\eta)^2\kappa^2 + \zeta^2} + \xi - 1}\right) - \\
&\frac{2\zeta(1-\nu)}{1-2\nu} \ln\left(\frac{\sqrt{(1+\xi)^2 + (1+\eta)^2\kappa^2 + \zeta^2} + \xi + 1}{\sqrt{(1+\xi)^2 + (1-\eta)^2\kappa^2 + \zeta^2} + \xi + 1}\right),
\end{aligned} \tag{3.13}$$



$$\begin{aligned}
\hat{f}_w(\xi, \eta, \zeta) = & \arctan\left(\frac{(1-\xi)(1-\eta)\kappa}{\zeta\sqrt{(1-\xi)^2 + (1-\eta)^2\kappa^2 + \zeta^2}}\right) + \\
& \arctan\left(\frac{(1-\xi)(1+\eta)\kappa}{\zeta\sqrt{(1-\xi)^2 + (1+\eta)^2\kappa^2 + \zeta^2}}\right) + \\
& \arctan\left(\frac{(1+\xi)(1-\eta)\kappa}{\zeta\sqrt{(1+\xi)^2 + (1-\eta)^2\kappa^2 + \zeta^2}}\right) + \\
& \arctan\left(\frac{(1+\xi)(1+\eta)\kappa}{\zeta\sqrt{(1+\xi)^2 + (1+\eta)^2\kappa^2 + \zeta^2}}\right),
\end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned}
\hat{g}_w(\xi, \eta, \zeta) = & (1+\xi)\ln\left(\frac{\sqrt{(1+\xi)^2 + (1+\eta)^2\kappa^2 + \zeta^2} + (1+\eta)\kappa}{\sqrt{(1+\xi)^2 + (1-\eta)^2\kappa^2 + \zeta^2} - (1-\eta)\kappa}\right) - \\
& (1-\xi)\ln\left(\frac{\sqrt{(1-\xi)^2 + (1-\eta)^2\kappa^2 + \zeta^2} - (1-\eta)\kappa}{\sqrt{(1-\xi)^2 + (1+\eta)^2\kappa^2 + \zeta^2} + (1+\eta)\kappa}\right) + \\
& (1+\eta)\kappa\ln\left(\frac{\sqrt{(1+\xi)^2 + (1+\eta)^2\kappa^2 + \zeta^2} + \xi + 1}{\sqrt{(1-\xi)^2 + (1+\eta)^2\kappa^2 + \zeta^2} + \xi - 1}\right) + \\
& (1+\eta)\kappa\ln\left(\frac{\sqrt{(1+\xi)^2 + (1-\eta)^2\kappa^2 + \zeta^2} + \xi + 1}{\sqrt{(1-\xi)^2 + (1-\eta)^2\kappa^2 + \zeta^2} + \xi - 1}\right).
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Ze wzorów (3.8), z uwzględnieniem oznaczeń (3.9)-(3.15), możemy wyznaczyć przemieszczenia dowolnego punktu półprzestrzeni, równomiernie obciążonej w kształcie prostokąta o wymiarach  $2a \times 2b$ .

W dostępnej literaturze autor nie znalazł ogólnych wzorów w takiej postaci <sup>30/</sup>.

Należy zaznaczyć, że w monografii [76] również uzyskano wzory na przemieszczenia półprzestrzeni poddanej obciążeniu prostokątnemu. Jednak, niestety, jak pokazano w Załączniku 2, pkt.3, te wzory zawierają błędy, chociaż w szczególnych przypadkach można uzyskać poprawne wyniki, na przykład  $w(0,0,0)=2,244ap(1-\nu^2)/E$ .

---

<sup>30/</sup> Poprawne wzory na przemieszczenia  $w(x,y,z)$  dla obciążenia półprzestrzeni w kształcie prostokąta, w innej postaci, znaleziono na stronie internetowej [https://scadsoft.com/tests\\_scad/index/test/165](https://scadsoft.com/tests_scad/index/test/165). Na tej stronie internetowej podano obliczenia *MES*, za pomocą programu komputerowego *SCAD*, problemu A. E. H. Love'a [75]. Dodatkowe wyjaśnienia podano w Załączniku 2.

Ważny jest wzór na maksymalne przemieszczenie pionowe. Poniżej przedstawiono go w jednej z pięciu różnych postaci, danych w Załączniku 2 (patrz wzory (Z2.8)-(Z2.12))

$$w_{\max} = w(0,0,0,\kappa) = \frac{4ap(1-\nu^2)}{E\pi} \left[ \kappa \operatorname{arctgh}(\sqrt{1+\kappa^2}) + \operatorname{arcsinh}(\kappa) \right]. \quad (3.16)$$

**Powyższego wzoru autor nie znalazł w dostępnej literaturze.**

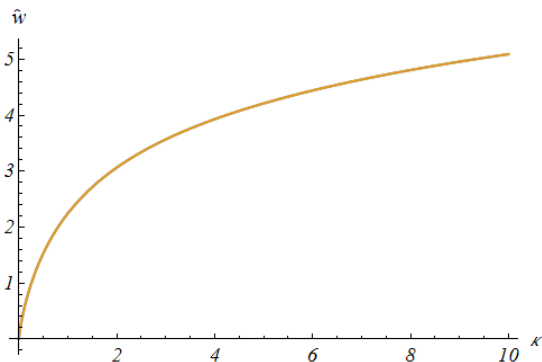
W monografii [62], s. 409, znajdujemy wartości maksymalnego przemieszczenia  $w(0,0,0)=2,244ap(1-\nu^2)/E$  oraz pod narożem kwadratu  $w(1,1,0)=1,122ap(1-\nu^2)/E$ .

Autor rozprawy zauważył pewne zależności między przemieszczeniami  $w(0,0,0,\kappa)$ ,  $w(1,0,0,\kappa)$ ,  $w(0,1,0,\kappa)$ ,  $w(1,1,0,\kappa)$ . Oto te zależności:

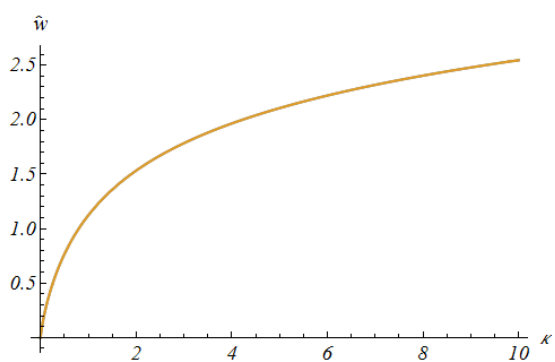
$$\begin{aligned} w(1,0,0,2\kappa) &= w(0,0,0,\kappa), & w(1,1,0,\kappa) &= \frac{1}{2} w(0,0,0,\kappa), \\ w(1,1,0,2\kappa) &= w(0,1,0,\kappa), & w(0,1,0,\kappa) &= \frac{1}{2} w(0,0,0,2\kappa). \end{aligned} \quad (3.17)$$

**Takich zależności autor nie znalazł w dostępnej literaturze.**

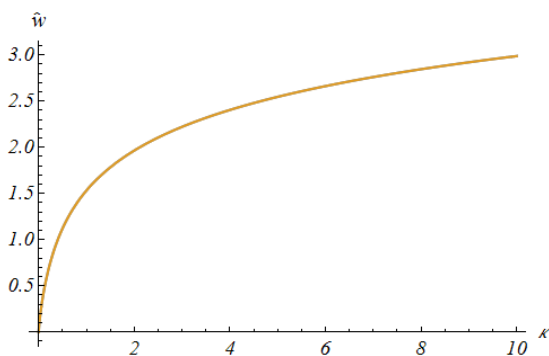
Na rys.3.4-3.7 przedstawiono zależności (3.17) dla  $\nu=0$ .



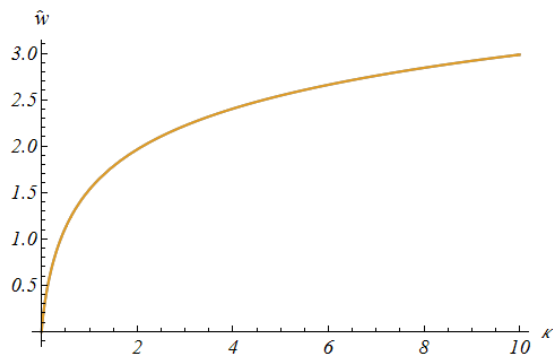
Rys.3.4. Wykres  $\hat{w}(1,0,0,2\kappa)$  i  $\hat{w}(0,0,0,\kappa)$ .



Rys.3.5. Wykres  $\hat{w}(1,1,0,\kappa)$  i  $\frac{1}{2} \hat{w}(0,0,0,\kappa)$ .



Rys.3.6. Wykres  $\hat{w}(1,1,0,2\kappa)$  i  $\hat{w}(0,1,0,\kappa)$ .



Rys.3.7. Wykres  $\hat{w}(0,1,0,\kappa)$  i  $\frac{1}{2} \hat{w}(0,0,0,2\kappa)$ .

Widoczne jest, że z powyższych wzorów bardzo łatwo jest wyznaczyć przemieszczenia w środkach boków prostokąta, jak też w narożach.

W monografii [62], s. 409, S. Timoshenko i J. Goodier podali, że w przypadku obciążenia kształcie kwadratu, przemieszczenie w narożu kwadratu jest równe połowie przemieszczenia w środku kwadratu. Okazuje się, że takie stwierdzenie jest słuszne dla obciążenia w kształcie nie tylko kwadratu, ale i prostokąta. W przypadku innej wartości  $\kappa$ , w monografii [62], s. 409 podano przybliżony wzór na niezdefiniowane średnie przemieszczenie.

Wzory na przemieszczenia płaszczyzny  $\zeta=0$  zapiszemy następująco:

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta, 0) &= \frac{ap}{E} \hat{u}(\xi, \eta, 0), & v(\xi, \eta, 0) &= \frac{ap}{E} \hat{v}(\xi, \eta, 0), \\ w(\xi, \eta, 0) &= \frac{ap}{E} \hat{w}(\xi, \eta, 0), \end{aligned} \tag{3.18}$$

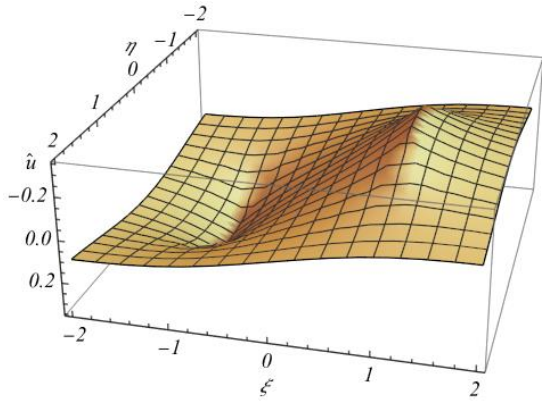
gdzie:

$$\begin{aligned} \hat{u}(\xi, \eta, 0) &= \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2\pi} (1-\xi) \arctan\left(\frac{(1-\eta)\kappa}{1-\xi}\right) + \\ &\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2\pi} (1-\xi) \arctan\left(\frac{(1+\eta)\kappa}{1-\xi}\right) - \\ &\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2\pi} (1+\xi) \left[ \arctan\left(\frac{(1-\eta)\kappa}{1+\xi}\right) + \arctan\left(\frac{(1+\eta)\kappa}{1+\xi}\right) \right] - \\ &\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{4\pi} \kappa (1+\eta) \ln\left(\frac{(1+\eta)^2 \kappa^2 + (1+\xi)^2}{(1+\eta)^2 \kappa^2 + (1-\xi)^2}\right) - \\ &\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{4\pi} \kappa (1-\eta) \ln\left(\frac{(1-\eta)^2 \kappa^2 + (1+\xi)^2}{(1-\eta)^2 \kappa^2 + (1-\xi)^2}\right), \end{aligned} \tag{3.19}$$

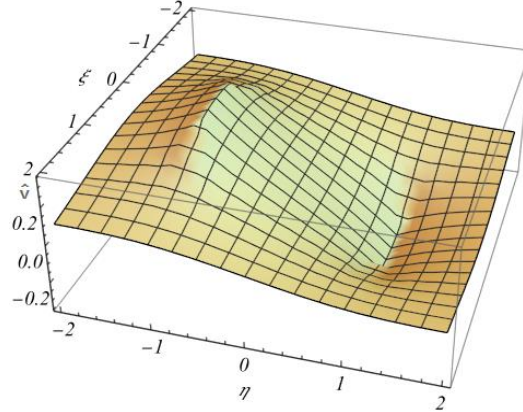
$$\begin{aligned}
\hat{v}(\xi, \eta, 0) = & \kappa \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2\pi} (1-\eta) \operatorname{arccot} \left( \frac{(1-\eta)\kappa}{1-\xi} \right) - \\
& \kappa \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2\pi} (1-\eta) \operatorname{arccot} \left( -\frac{(1-\eta)\kappa}{1+\xi} \right) - \\
& (1+\eta) \left[ \arctan \left( \frac{1-\xi}{(1+\eta)\kappa} \right) + \arctan \left( \frac{1+\xi}{(1+\eta)\kappa} \right) \right] + \\
& \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{4\pi} (1+\xi) \ln \left( \frac{(1-\eta)^2 \kappa^2 + (1+\xi)^2}{(1+\eta)^2 \kappa^2 + (1+\xi)^2} \right) + \\
& \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{4\pi} (1-\xi) \ln \left( \frac{(1-\eta)^2 \kappa^2 + (1-\xi)^2}{(1+\eta)^2 \kappa^2 + (1-\xi)^2} \right),
\end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned}
\hat{w}(\xi, \eta, 0) = & \frac{1-\nu^2}{\pi} (1-\xi) \ln \left( \frac{\sqrt{(1-\xi)^2 + (1+\eta)^2 \kappa^2} + (1+\eta)\kappa}{\sqrt{(1-\xi)^2 + (1-\eta)^2 \kappa^2} - (1-\eta)\kappa} \right) - \\
& \frac{1-\nu^2}{\pi} (1+\xi) \ln \left( \frac{\sqrt{(1+\xi)^2 + (1-\eta)^2 \kappa^2} - (1-\eta)\kappa}{\sqrt{(1+\xi)^2 + (1+\eta)^2 \kappa^2} + \kappa(1+\eta)} \right) + \\
& \frac{1-\nu^2}{\pi} \kappa(1-\eta) \ln \left( \frac{\sqrt{(1+\xi)^2 + (1-\eta)^2 \kappa^2} + \xi + 1}{\sqrt{(1-\xi)^2 + (1-\eta)^2 \kappa^2} + \xi - 1} \right) - \\
& \frac{1-\nu^2}{\pi} \kappa(1+\eta) \ln \left( \frac{\sqrt{(1-\xi)^2 + (1+\eta)^2 \kappa^2} + \xi - 1}{\sqrt{(1+\xi)^2 + (1+\eta)^2 \kappa^2} + \xi + 1} \right).
\end{aligned} \tag{3.21}$$

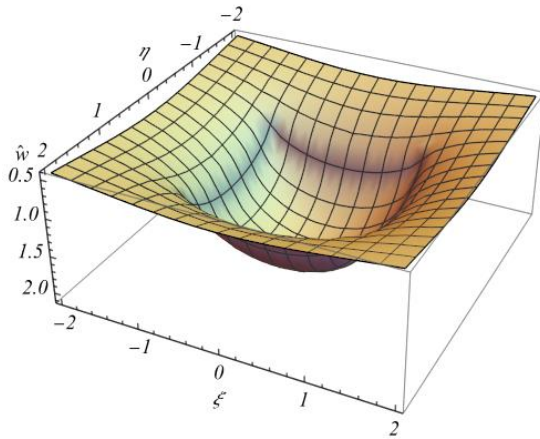
Na rys.3.8-3.15 przedstawiono wykresy przemieszczeń  $\hat{u}(\xi, \eta, 0)$ ,  $\hat{v}(\xi, \eta, 0)$  oraz  $\hat{w}(\xi, \eta, 0)$ .



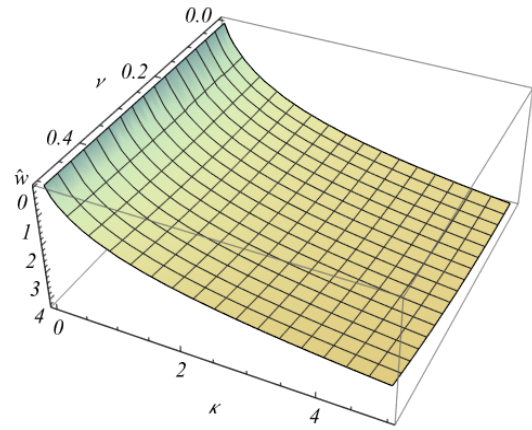
Rys.3.8. Wykres  $\hat{u}(\xi, \eta, 0)$  dla  $\kappa=1, \nu=1/4$ .



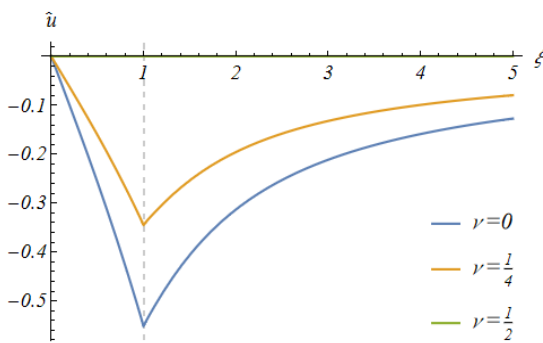
Rys.3.9. Wykres  $\hat{v}(\xi, \eta, 0)$  dla  $\kappa=1, \nu=1/4$ .



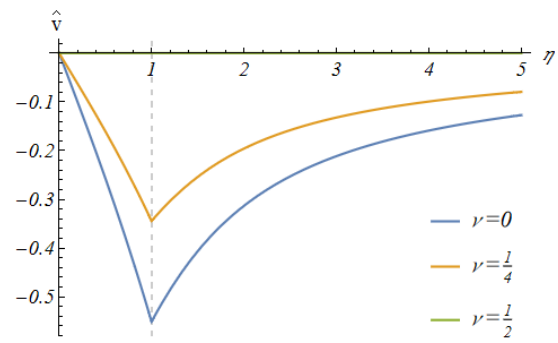
Rys.3.10. Wykres  $\hat{w}(\xi, \eta, 0)$  dla  $\kappa=1, \nu=1/4$ .



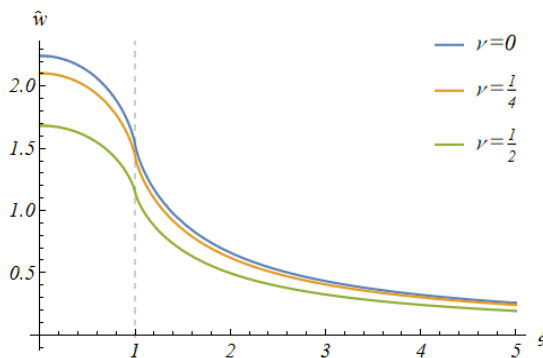
Rys.3.11. Wykres  $\hat{w}(0, 0, 0, \kappa, \nu)$ .



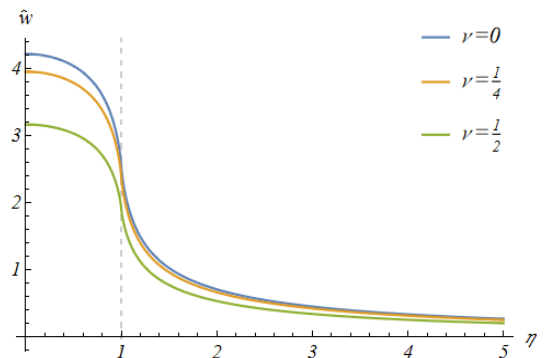
Rys.3.12. Wykres  $\hat{u}(\xi, 0, 0)$  dla  $\kappa=1$ .



Rys.3.13. Wykres  $\hat{v}(0, \eta, 0)$  dla  $\kappa=1$ .



Rys.3.14. Wykres  $\hat{w}(\xi, 0, 0)$  dla  $\kappa=1$ .



Rys.3.15. Wykres  $\hat{w}(0, \eta, 0)$  dla  $\kappa=5$ .

Jak wynika z rys.3.12-3.13, przemieszczenia poziome są równe zero w środku przyłożonego obciążenia, a ekstremalne (ujemne) są na granicy tego obciążenia ( $\zeta=1$  lub  $\eta=1$ ). Natomiast z rys.3.14-3.15 wynika, że przemieszczenia pionowe są maksymalne w środku obciążenia i zanikają wraz z oddalaniem się od jego boków.

Funkcje charakteryzujące zmienność przemieszczeń wzdłuż osi  $\zeta$  zapiszemy następująco:

$$u(1,0,\zeta) = \frac{ap}{E} \hat{u}(1,0,\zeta), \quad v(0,1,\zeta) = \frac{ap}{E} \hat{v}(0,1,\zeta), \quad (3.22)$$

$$w(0,0,\zeta) = \frac{ap}{E} \hat{w}(0,0,\zeta),$$

gdzie:

$$\hat{u}(1,0,\zeta) = \frac{2(1+\nu)(1-2\nu)}{\pi} \left[ \arctan\left(\frac{\zeta\kappa}{2\sqrt{4+\zeta^2+\kappa^2}}\right) - \arctan\left(\frac{\kappa}{2}\right) \right] +$$

$$\frac{(1+\nu)(1-2\nu)\kappa}{\pi} \ln\left(\frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 + \kappa^2}}{\zeta + \sqrt{4+\zeta^2+\kappa^2}}\right) + \quad (3.23)$$

$$\frac{\zeta(1-\nu^2)}{\pi} \left[ \ln\left(\frac{\sqrt{\zeta^2 + \kappa^2} + \kappa}{\sqrt{\zeta^2 + \kappa^2} - \kappa}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{4+\zeta^2+\kappa^2} - \kappa}{\sqrt{4+\zeta^2+\kappa^2} + \kappa}\right) \right],$$

$$\hat{v}(0,1,\zeta) = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{\pi} \left[ \operatorname{arcsinh}(\zeta) - \ln\left(\zeta + \sqrt{1+\zeta^2+4\kappa^2}\right) \right] -$$

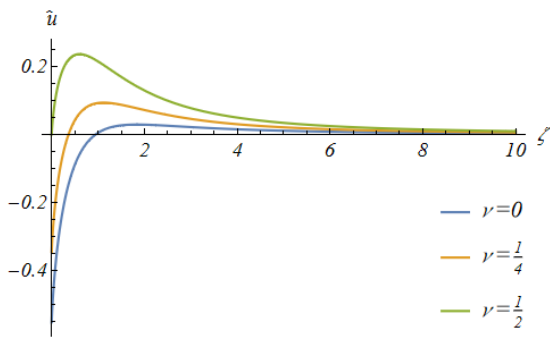
$$\frac{2(1+\nu)(1-2\nu)\kappa}{\pi} \left[ \operatorname{arccot}(2\kappa) - \operatorname{arccot}\left(\frac{2\kappa\sqrt{1+\zeta^2+4\kappa^2}}{\zeta}\right) \right] + \quad (3.24)$$

$$\frac{\zeta(1-\nu^2)}{\pi} \left[ \ln\left(\frac{\sqrt{1+\zeta^2}+1}{\sqrt{1+\zeta^2}-1}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{1+\zeta^2+4\kappa^2}-1}{\sqrt{1+\zeta^2+4\kappa^2}+1}\right) \right],$$

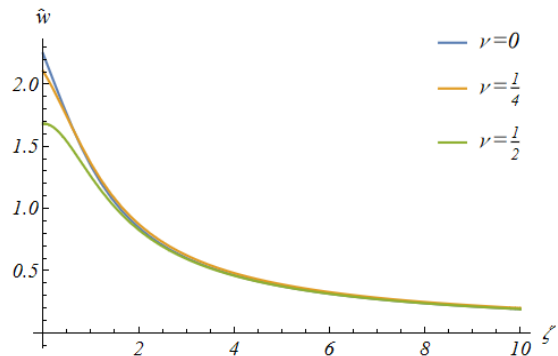
$$\hat{w}(0,0,\zeta) = -\frac{2\zeta(1+\nu)(1-2\nu)}{\pi} \operatorname{arccot}\left(\frac{\zeta\sqrt{1+\zeta^2+\kappa^2}}{\kappa}\right) -$$

$$\frac{2(1-\nu^2)}{\pi} \left[ \kappa \ln\left(\frac{\sqrt{1+\zeta^2+\kappa^2}-1}{\sqrt{1+\zeta^2+\kappa^2}+1}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{1+\zeta^2+\kappa^2}-\kappa}{\sqrt{1+\zeta^2+\kappa^2}+\kappa}\right) \right]. \quad (3.25)$$

Na rys.3.16-3.17 przedstawiono wykresy zanikania maksymalnych przemieszczeń wraz z głębokością  $\hat{u}(1,0,\zeta)=\hat{v}(0,1,\zeta)$  oraz  $\hat{w}(0,0,\zeta)$  dla  $\kappa=1$ .



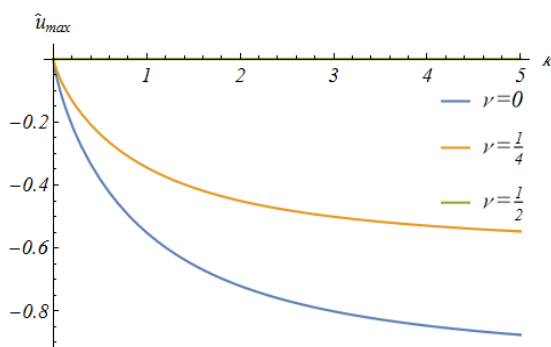
Rys.3.16. Wykres  $\hat{u}(1,0,\zeta)=\hat{v}(0,1,\zeta)$  dla  $\kappa=1$ .



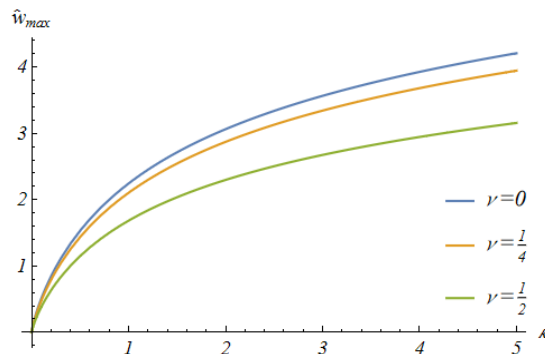
Rys.3.17. Wykres  $\hat{w}(0,0,\zeta)$  dla  $\kappa=1$ .

Z rys.3.16-3.17 wynika, że przemieszczenia poziome  $\hat{u}(1,0,\zeta)$  oraz  $\hat{v}(0,1,\zeta)$ , obliczone dla  $\nu=1/2$ , są równe zero tylko dla  $\zeta=0$ , natomiast dla dowolnej głębokości  $\zeta$  są różne od zera.

Na rys.3.18-3.19 przedstawiono wykresy zależności przemieszczeń  $\hat{u}(1,0,0,\kappa)$  oraz  $\hat{w}(0,0,0,\kappa)$  od wartości  $\kappa$ .



Rys.3.18. Wykres  $\hat{u}(1,0,0,\kappa)$ .

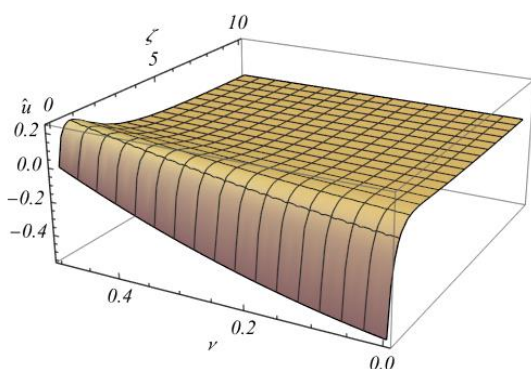


Rys.3.19. Wykres  $\hat{w}(0,0,0,\kappa)$ .

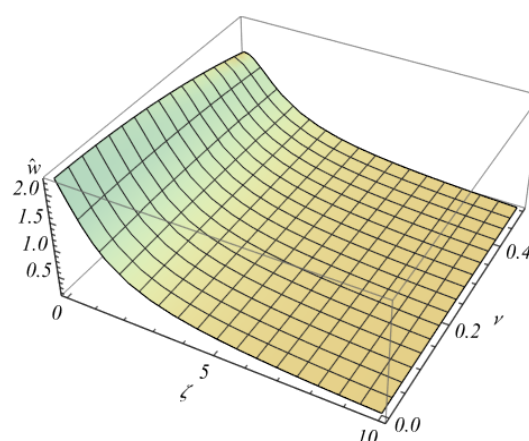
Z rys.3.19 oraz wzoru (3.25) wynika, że maksymalne przemieszczenia pionowe nieograniczenie rośnie wraz ze wzrostem  $\kappa$ . Natomiast przemieszczenia poziome (rys.3.18), wraz ze wzrostem  $\kappa$  przyjmują wartość graniczną

$$\lim_{\kappa \rightarrow \infty} u(1,0,\zeta) = -\frac{ap(1+\nu)(1-2\nu)}{E}. \quad (3.26)$$

Na rys.3.20-3.21 przedstawiono wykresy zależności przemieszczeń  $\hat{u}(1,0,\zeta,\nu)$  oraz  $\hat{w}(0,0,\zeta,\nu)$  od współczynnika Poissona.

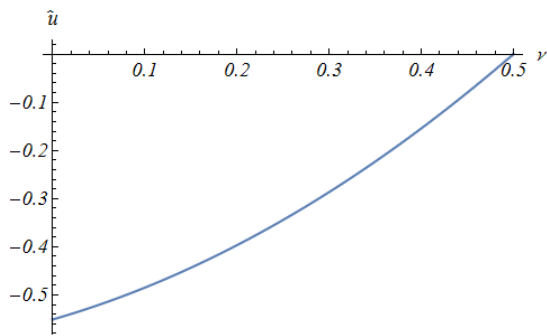


Rys.3.20. Wykres  $\hat{u}(1,0,\zeta,\nu)$ .

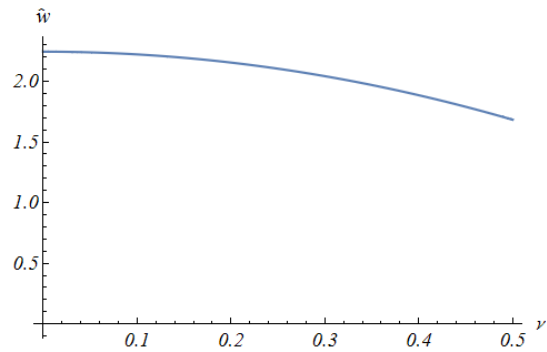


Rys.3.21. Wykres  $\hat{w}(0,0,\zeta,\nu)$ .

Na rys.3.22-3.23 przedstawiono wykresy zależności maksymalnych przemieszczeń  $\hat{u}(1,0,0,\nu)=\hat{v}(0,1,0,\nu)$  oraz  $\hat{w}(0,0,0,\nu)$  od współczynnika Poissona.



Rys.3.22. Wykres  $\hat{u}(1,0,0,\nu)=\hat{v}(0,1,0,\nu)$ .



Rys.3.23. Wykres  $\hat{w}(0,0,0,\nu)$ .

Z rys.3.22-3.23 wynika, że przemieszczenia poziome warstwy powierzchniowej  $u(\xi,0,0)$  oraz  $v(0,\eta,0)$  przyjmują wartość zero dla  $\nu=1/2$ , natomiast przemieszczenia pionowe  $w(0,0,0)$  są różne od zera dla  $0 \leq \nu \leq 1/2$ .

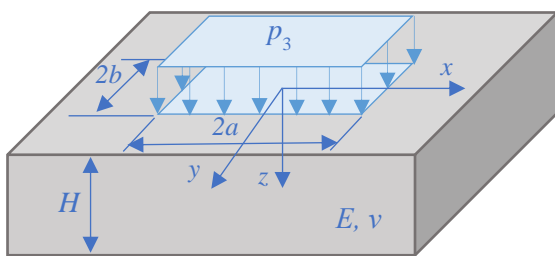
Maksymalne przemieszczenia dla  $\kappa=1$  wynoszą:

$$u(1,0,0,\nu) = v(0,1,0,\nu) = -0,551 \frac{ap(1+\nu)(1-2\nu)}{E}, \quad (3.27)$$

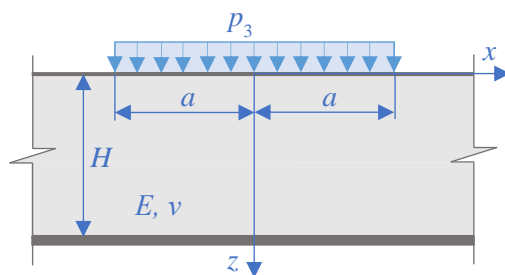
$$w(0,0,0,\nu) = 2,244 \frac{ap(1-\nu^2)}{E}.$$

### 3.2.3 Warstwa obciążona równomiernie na powierzchni prostokątnej<sup>31/</sup>

Rozpatrzmy zagadnienie obciążenia warstwy na powierzchni w kształcie prostokąta (rys.3.24). Niżej opisany sposób rozwiązania można stosować wyłącznie w przypadku obciążeń pionowych [11], s. 194.



Rys.3.24. Warstwa poddana obciążeniu w kształcie prostokąta.



Rys.3.25. Przekrój warstwy dla  $y=0$ .

W przypadku obciążeń pionowych (równoległych do osi  $z$ ), do rozwiązania danego zagadnienia wykorzystamy reprezentację wektora przemieszczeń za pomocą funkcji Papkowicza-Neubera

<sup>31/</sup> Sposób rozwiązania takiego zagadnienia został podany w monografii [11], s. 194.



$$u_i = \Phi_{,i} + (x_j \Psi_j)_{,i} - 4(1-\nu)\Psi_i, \quad (3.28)$$

gdzie  $i, j=1, 2, 3$ . Natomiast funkcje  $\Phi$  i  $\Psi_i$  wybierzemy następująco:

$$\Phi = (1-2\nu)\chi, \quad \Psi_i = \delta_{i3} \frac{\partial \chi}{\partial x_3}, \quad (3.29)$$

gdzie  $\chi=\chi(x_3)$  jest funkcją harmoniczną, spełniająca równanie Laplace'a

$$\nabla^2 \chi = 0, \quad (3.30)$$

z warunkami brzegowymi:

$$\sigma_{33}(x_\alpha, x_3=0) = \begin{cases} -p_3 & \text{dla } (-a \leq x_1 \leq a, -b \leq x_2 \leq b), \\ 0 & \text{dla } (x_1 < -a, x_1 > a, x_2 < -b, x_2 > b), \end{cases} \quad (3.31)$$

$$\sigma_{3\alpha}(x_\alpha, x_3=0) = 0 \quad \text{dla } (-\infty < x_1 < \infty, -\infty < x_2 < \infty),$$

$$u_i(x_\alpha, x_3=H) = 0.$$

Podstawiając funkcje  $\Phi$  i  $\Psi_i$  do przemieszczeń (3.28), otrzymamy:

$$u_i = x_3 \chi_{,3i} + (1-2\nu)\chi_{,i} - (3-4\nu)\delta_{i3}\chi_{,i}. \quad (3.32)$$

Wyrażając naprężenia  $\sigma_{ij}$  poprzez przemieszczenia (3.32), otrzymamy:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= 2\mu [x_3 \chi_{,113} + (1-2\nu)\chi_{,11} - 2\nu\chi_{,33}], \\ \sigma_{22} &= 2\mu [x_3 \chi_{,223} + (1-2\nu)\chi_{,22} - 2\nu\chi_{,33}], \\ \sigma_{33} &= 2\mu [x_3 \chi_{,333} - \chi_{,33}], \quad \sigma_{13} = 2\mu x_3 \chi_{,133}, \\ \sigma_{23} &= 2\mu x_3 \chi_{,233}, \quad \sigma_{12} = 2\mu (x_3 \chi_{,123} + (1-2\nu)\chi_{,12}). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Stosując do równania Laplace'a (3.30) podwójne cosinusowe przekształcenia Fouriera, zdefiniowane wzorem

$$\tilde{f}(s, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty f(x_1, x_2) \cos(s x_1) \cos(t x_2) dx_1 dx_2, \quad (3.34)$$

a jego odwrotność

$$f(x_1, x_2) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \tilde{f}(s, t) \cos(s x_1) \cos(t x_2) ds dt, \quad (3.35)$$

kolejno otrzymujemy transformaty: funkcji  $\chi$ , przemieszczeń  $u_i$  oraz naprężeń  $\sigma_{ij}$ . Po spełnieniu warunków brzegowych (3.31) wyznaczmy przemieszczenia za pomocą transformacji odwrotnej (3.35).

Obliczenia całek odwrotnej transformacji Fouriera (3.35) jest uciążliwe. Autor nie uzyskał wzorów w postaci funkcji zamkniętych na przemieszczenia  $u_i$ . Możliwe jest

jednak uzyskanie wyników stosując całkowanie numeryczne, które zostało wykonane w programie *Wolfram Mathematica 13*.

Wprowadzając współrzędne bezwymiarowe  $\xi, \eta, \zeta, \lambda, \sigma, \tau$

$$x_1 = \xi a, \quad x_2 = \eta a, \quad x_3 = \zeta a, \quad s = \frac{\sigma}{a}, \quad t = \frac{\tau}{a}, \quad \lambda = \frac{H}{a}, \quad (3.36)$$

transformatę przemieszczeń pionowych  $\tilde{u}_3 = \tilde{w}$  zapiszemy w postaci:

$$\tilde{w} = \frac{(1+\nu)a^3 p}{E} \tilde{f}_w (\tilde{g}_w - \tilde{h}_w), \quad (3.37)$$

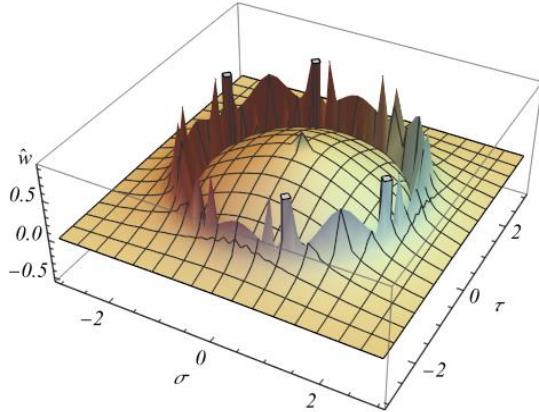
w której:

$$\tilde{f}_w = \frac{e^{-\zeta\sqrt{\sigma^2+\tau^2}} \cos(\xi\sigma) \cos(\eta\sigma) \sin(\sigma) \sin(\kappa\tau)}{\pi\sigma\tau(\sigma^2+\tau^2)},$$

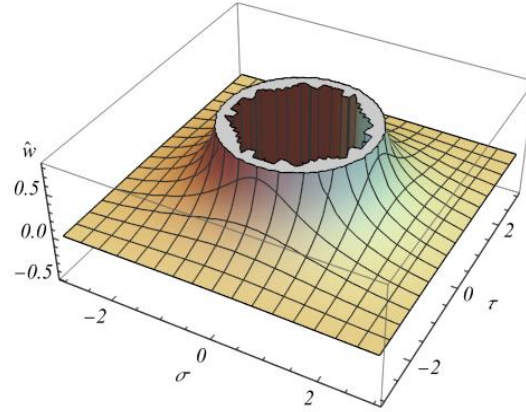
$$\tilde{g}_w = \frac{2e^{2\zeta\sqrt{\sigma^2+\tau^2}} \left[ 2(1-\nu)\sqrt{\sigma^2+\tau^2} - \zeta(\sigma^2+\tau^2) \right] \left[ 2(1-\nu)\sqrt{\sigma^2+\tau^2} + \lambda(\sigma^2+\tau^2) \right]}{-2(1-\nu)\sqrt{\sigma^2+\tau^2} \left( 1 + e^{2\lambda\sqrt{\sigma^2+\tau^2}} \right) - \lambda(\sigma^2+\tau^2) \left( 1 - e^{2\lambda\sqrt{\sigma^2+\tau^2}} \right)},$$

$$\tilde{h}_w = \frac{2e^{2\zeta\sqrt{\sigma^2+\tau^2}} \left[ 2(1-\nu)\sqrt{\sigma^2+\tau^2} - \zeta(\sigma^2+\tau^2) \right] \left[ 2(1-\nu)\sqrt{\sigma^2+\tau^2} + \lambda(\sigma^2+\tau^2) \right]}{2(1-\nu)\sqrt{\sigma^2+\tau^2} \left( 1 + e^{2\lambda\sqrt{\sigma^2+\tau^2}} \right) + \lambda(\sigma^2+\tau^2) \left( 1 - e^{2\lambda\sqrt{\sigma^2+\tau^2}} \right)}.$$

Na rys.3.26-3.27 przedstawiono, przeskalowane przez mnożnik  $E/a^3 p$ , wykresy transformaty przemieszczeń (3.37) w zależności od parametrów  $\sigma$  i  $\tau$  dla  $\kappa=1$  i  $\lambda=1$ .



Rys.3.26. Wykres  $\tilde{w}$  dla  $\nu=0, \kappa=1, \lambda=1$ .

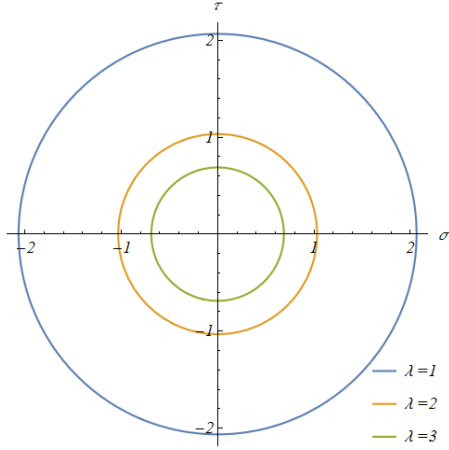


Rys.3.27. Wykres  $\tilde{w}$  dla  $\nu=1/2, \kappa=1, \lambda=1$ .

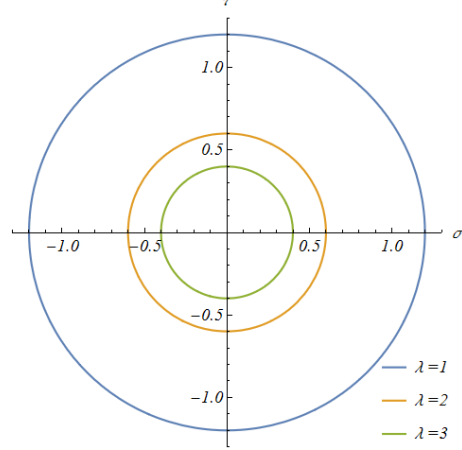
Jak widać ze wzoru (3.37) i rys.3.26-3.27, funkcja podcałkowa (3.37) jest nieciągła w punktach o stałym promieniu zależącym od wartości  $\lambda$  oraz  $\nu$ . Dla warstwy powierzchniowej ( $\zeta=0$ ), krzywe, na których mianownik funkcji podcałkowej (3.37) jest równy zero, zapiszemy w postaci

$$m_0 = \lambda\sqrt{\sigma^2 + \tau^2} \sinh\left[\lambda\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}\right] - 2(1-\nu)\cosh\left[\lambda\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}\right]. \quad (3.38)$$

Na rys.3.28-3.29 przedstawiono wykresy krzywych, na których mianownik  $m_0$  funkcji podcałkowej jest równy zero dla  $\kappa=1$ .



Rys.3.28. Wykres  $m_0=0$  dla  $\nu=0$ ,  $\kappa=1$ .



Rys.3.29. Wykres  $m_0=0$  dla  $\nu=1/2$ ,  $\kappa=1$ .

W przekroju  $\eta=0$ ,  $\zeta=0$  oraz  $\kappa=1$  transformatę przemieszczeń pionowych zapiszemy następująco

$$\tilde{w} = \frac{4(1-\nu^2)\cos(\xi\sigma)\sin(\sigma)\sin(\tau)}{\pi\sigma\tau(\sigma^2 + \tau^2)} \cdot \frac{\lambda(\sigma^2 + \tau^2)\cosh(\lambda\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}) - 2(1-\nu)\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}\sinh(\lambda\sqrt{\sigma^2 + \tau^2})}{\lambda\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}\sinh(\lambda\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}) - 2(1-\nu)\cosh(\lambda\sqrt{\sigma^2 + \tau^2})}. \quad (3.39)$$

Jak się okazuje, wyniki całkowania numerycznego zależą od składni komendy *NIntegrate*.

W tab.1 przedstawiono porównanie wyników całkowania numerycznego transformaty przemieszczeń (3.39), przeskalowanych przez mnożnik  $E/ap$ , otrzymanych dla  $\nu=0$  przy zastosowaniu następującej składni komendy *NIntegrate*:

```
w1=NIntegrate[w~w,{sigma,0,infinity},{tau,0,infinity}],
w2=NIntegrate[w~w,{sigma,0,infinity},{tau,0,infinity},Method->GaussKronrodRule],
w3=NIntegrate[w~w,{sigma,0,infinity},{tau,0,infinity},Method->GaussKronrodRule,MaxRecursion->100],
w4=NIntegrate[w~w,{sigma,0,infinity},{tau,0,infinity},Method->GaussKronrodRule,MaxRecursion->100,
Exclusions->m0=0],
w5=NIntegrate[w~w,{sigma,0,infinity},{tau,0,infinity},Method->MultiDimensionalRule],
w6=NIntegrate[w~w,{sigma,0,infinity},{tau,0,infinity},Method->MultidimensionalRule,MaxRecursion->100,
Exclusions->m0=0].
```

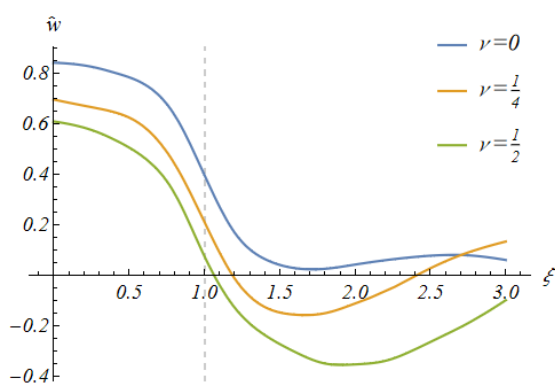
Tab.1. Wartości maksymalnych przemieszczeń pionowych dla  $\nu=0$ .

$\xi$	$\lambda=1$					$\lambda=5$				
	0	0,5	1	1,5	2	0	0,5	1	1,5	2
$w_1$	0,838	0,779	0,396	0,028	0,044	0,838	0,779	0,396	0,028	0,044
$w_2$	0,922	0,845	0,343	0,009	0,000	0,922	0,845	0,343	0,009	0,000
$w_3$	0,841	0,797	0,385	0,024	0,046	0,841	0,797	0,385	0,024	0,046
$w_4$	0,822	0,77	0,379	0,046	0,053	0,822	0,77	0,379	0,046	0,053
$w_5$	0,824	0,77	0,407	0,033	0,038	0,824	0,77	0,407	0,033	0,038
$w_6$	0,822	0,77	0,379	0,046	0,053	0,822	0,77	0,379	0,046	0,053

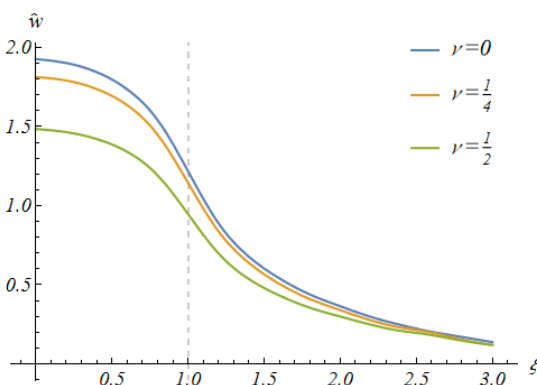
Jak wynika z tab.1, zastosowanie tej czy innej metody całkowania ma znaczący wpływ na wyniki przemieszczeń dla niewielkich wartości  $\lambda$ . Warto zaznaczyć, że z pracy [77], dotyczącej oceny dokładności wyników uzyskanych na podstawie rozwiązania Boussinesq'a poprzez całkowanie numeryczne, wynika, że efektywne jest zastosowanie metody całkowania wg algorytmu Simpsona.

Na rys.3.30-3.31 przedstawiono, odpowiednio przeskalowane przez mnożnik  $E/ap^{3/2}$ , wykresy przemieszczeń pionowych  $\hat{w}(\xi, 0, 0)$ , otrzymane dla  $\kappa=1$ . Wykresy zostały sporządzone za pomocą interpolacji splajnem *BSplineFunction*<sup>33/</sup> przy zastosowaniu następującej składni komendy całkowania numerycznego *NIntegrate*:

*NIntegrate*[ $\tilde{w}, \{\sigma, 0, \infty\}, \{\tau, 0, \infty\}, \text{Method} \rightarrow \text{GaussKronrodRule}, \text{MaxRecursion} \rightarrow 100$ ].



Rys.3.30. Wykres  $\hat{w}(\xi, 0, 0)$  dla  $\kappa=1, \lambda=1$ .



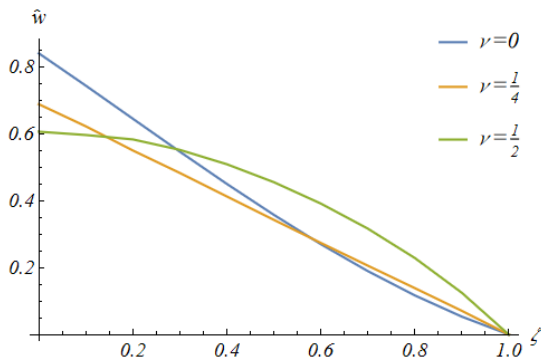
Rys.3.31. Wykres  $\hat{w}(\xi, 0, 0)$  dla  $\kappa=1, \lambda=5$ .

Tu warto zaznaczyć, że wartości przemieszczeń pionowych warstwy obciążonej w kształcie kwadratu o wymiarach  $2a \times 2a$  są mniejsze od przemieszczeń warstwy obciążonej na powierzchni w kształcie koła o promieniu  $a$  dla  $\lambda=1$  (patrz rys.3.34-3.35).

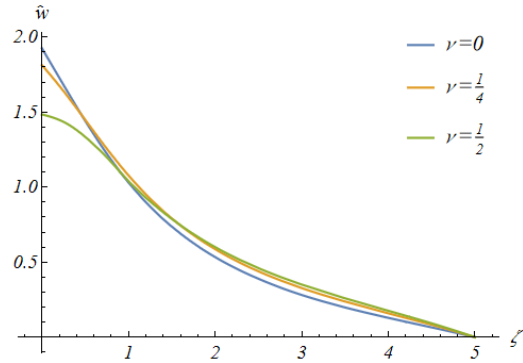
<sup>32/</sup> **Uwaga 1.** Wszystkie wykresy przemieszczeń dla półprzestrzeni lub warstwy, jeśli nie wskazano inaczej, są przeskalowane przez  $E/ap$ , to oznacza, że dana rzeczywista wartość przemieszczenia jest równa wartości z rysunku pomnożona przez  $ap/E$ . W przypadku układów: warstwa na półprzestrzeni lub układu warstwa na warstwie, stosujemy mnożnik  $E_2/ap$ .

<sup>33/</sup> Patrz dokumentacja Wolfram [78].

Na rys.3.32-3.33 przedstawiono wykresy przemieszczeń pionowych  $\hat{w}(0,0,\zeta)$ , sporządzone dla  $\kappa=1^{34}$ .



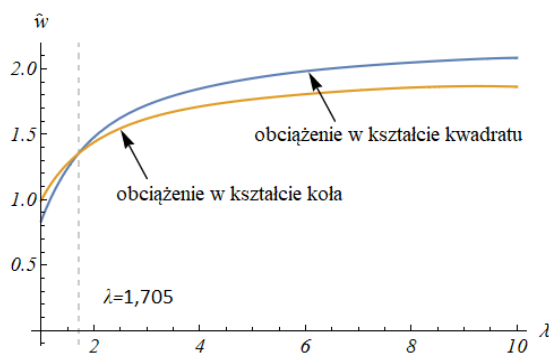
Rys.3.32. Wykres  $\hat{w}(0,0,\zeta)$  dla  $\kappa=1, \lambda=1$ .



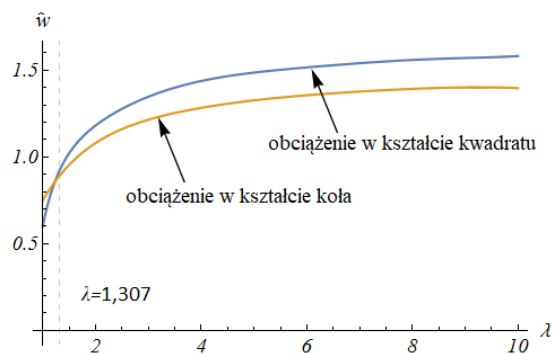
Rys.3.33. Wykres  $\hat{w}(0,0,\zeta)$  dla  $\kappa=1, \lambda=5$ .

W przypadku warstwy obciążonej w kształcie kwadratu o wymiarach  $2a \times 2a$ , dla  $\lambda < 1,705$  ( $\nu=0$ ) oraz  $\lambda < 1,307$  ( $\nu=1/2$ ), przemieszczenia pionowe są mniejsze od przemieszczeń warstwy obciążonej na powierzchni w kształcie koła o promieniu  $a$  (patrz rys.3.34-3.35), mimo tego, że pole obciążenia w kształcie kwadratu jest większe od pola obciążenia w kształcie koła:  $A_{kw}=4a^2$ , a  $A_{kol}=\pi a^2$ . Ten wynik jest nielogiczny, ponieważ mniejsze naciski powinny wywoływać mniejszy efekt przemieszczeniowy. Jednak już dla  $\lambda=1,705$  ( $\lambda=1,307$ ) maksymalne przemieszczenia warstwy obciążonej w kształcie kwadratu są większe od przemieszczeń warstwy obciążonej w kształcie koła. Mniejsze wartości przemieszczeń dla  $\lambda < 1,705$  ( $\lambda < 1,307$ ) mogą być spowodowane błędami numerycznymi przy obliczeniu retransformat przemieszczeń dla małych  $\lambda$ .

Na rys.3.34-3.35 przedstawiono porównawcze wykresy przemieszczeń pionowych  $\hat{w}(0,0,0,\lambda)$ , sporządzone dla warstwy obciążonej na kole o promieniu  $a$  (o warunkach brzegowych odpowiadających warstwie z poślizgiem, patrz punkt 3.3.2) oraz warstwy obciążonej na kwadracie o wymiarach  $2a \times 2a$ .



Rys.3.34. Wykres  $\hat{w}(0,0,0,\lambda)$  dla  $\nu=0, \kappa=1$ .

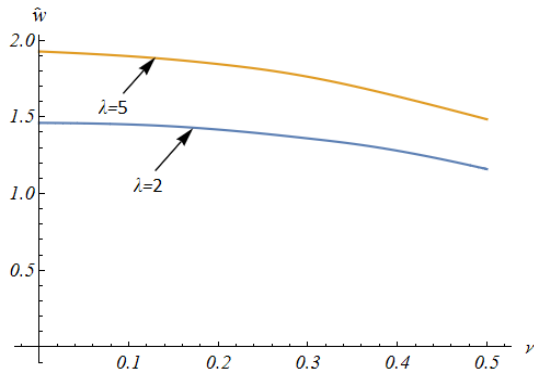


Rys.3.35. Wykres  $\hat{w}(0,0,0,\lambda)$  dla  $\nu=1/2, \kappa=1$ .

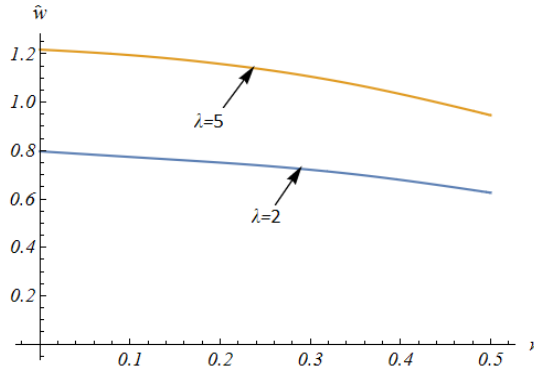
<sup>34</sup>/ Wykresy sporządzone za pomocą komendy *ListLinePlot*.

Przecięcie krzywych następuje w punkcie  $\lambda=1,705$  ( $\lambda=1,307$ ). Dla wartości  $\lambda>1,705$  ( $\lambda>1,307$ ) przemieszczenia warstwy obciążonej na kwadracie są większe niż przemieszczenia warstwy obciążonej na kole.

Na rys.3.36-3.37 przedstawiono wykresy zależności maksymalnych przemieszczeń pionowych  $\hat{w}(0,0,0,\nu)$  od współczynnika Poissona.



Rys.3.36. Wykres  $\hat{w}(0,0,0,\nu)$  dla  $\kappa=1$ .



Rys.3.37. Wykres  $\hat{w}(0,0,0,\nu)$  dla  $\kappa=1$ .

Jak wynika z rys.3.36-3.37, największe wartości przemieszczeń płaszczyzny  $\zeta=0$  uzyskuje się, gdy  $\nu=0$ , a najmniejsze, gdy  $\nu=1/2$ .

### 3.3 Zagadnienie obrotowo-symetryczne<sup>35/</sup>

W ciałach obciążonych osiowo-symetrycznie, przemieszczenia, odkształcenia i naprężenia będą niezależne od kąta  $\varphi$  (rys.3.38). Wektor przemieszczeń ma postać:

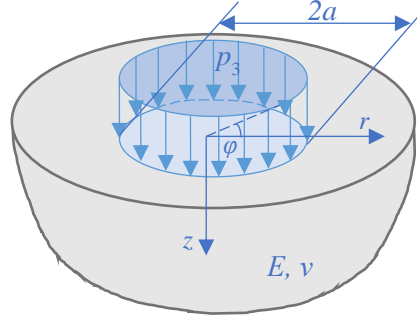
$$u \equiv u(u_r, 0, u_z). \quad (3.40)$$

W Załączniku 2 przedstawiono pełne rozwiązanie tego zagadnienia. Otrzymany tam układ równań różniczkowych cząstkowych sprowadzono metodą operatorową do jednego równania biharmonicznego na funkcję Love'a  $\chi = \chi(r, z)$

$$\nabla^4 \chi = 0, \quad (3.41)$$

w którym  $\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2 = \frac{\partial^4}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3}{\partial r^3} + 2 \frac{\partial^4}{\partial r^2 \partial z^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3}{\partial r \partial z^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^4}{\partial z^4}$ .

<sup>35/</sup> Opracowano na podstawie [11], s. 170.



Rys.3.38. Półprzestrzeń obciążona osiowoosymetrycznie.

Do rozwiązywania równania (3.41) często stosowane są przekształcenia całkowe Hankela, które zdefiniowano w następujący sposób [8], [9], [79]

$$\tilde{\chi}(s, z) = \int_0^{\infty} r \chi(r, z) J_0(sr) dr, \quad (3.42)$$

a odwrotność dana jest wzorem

$$\chi(r, z) = \int_0^{\infty} s \tilde{\chi}(s, z) J_0(sr) ds, \quad (3.43)$$

gdzie  $J_0$  –funkcja Bessela pierwszego rodzaju zerowego rzędu [80], s. 7.

Poniżej przedstawimy rozwiązania dla półprzestrzeni, warstwy, warstwy na półprzestrzeni oraz układu dwóch warstw sprężystych obciążonych na powierzchni w kształcie koła. Należy zaznaczyć, że szczegółowo powyższe zagadnienia przedstawiono między innymi w monografii [61].

### 3.3.1 Jednorodna półprzestrzeń poddana obciążeniu w kształcie koła<sup>36/</sup>

Jak pokazano w Załączniku 2, transformaty przemieszczeń oraz naprężeń można przedstawić następująco:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_r &= -\frac{ap(1+\nu)(1-2\nu-sz)}{Es^2} e^{-sz} J_1(as), \\ \tilde{u}_z &= \frac{ap(1+\nu)(2(1-\nu)+sz)}{Es^2} e^{-sz} J_1(as), \\ \tilde{\sigma}_{zz} &= -\frac{ap(1+sz)}{s} e^{-sz} J_1(as), \quad \tilde{\sigma}_{rz}(s, z) = -apze^{-sz} J_1(as). \end{aligned} \quad (3.44)$$

Wykonując odwrotne przekształcenia Hankela dla transformat (3.45), otrzymamy wzory na przemieszczenia:

<sup>36/</sup> W poniższych podrozdziałach na ogół ograniczamy się do wyznaczenia przemieszczeń. Szereg przypadków wyznaczenia naprężeń oraz odkształceń przedstawiono w monografii [61].

$$u_r(r, z) = \int_0^{\infty} s \tilde{u}_r(s, z) J_0(sr) ds, \quad u_z(r, z) = \int_0^{\infty} s \tilde{u}_z(s, z) J_0(sr) ds. \quad (3.45)$$

Całki (3.45) są szybko zbieżne [61]. Obliczanie odwrotnych transformat przemieszczeń oraz naprężeń zostało wykonane w programie *Wolfram Mathematica 13*. W przypadku półprzestrzeni, przy ustaleniu jednej współrzędnej przestrzennej ( $\rho$  lub  $\zeta$ ), jest możliwe uzyskanie retransformat w postaci analitycznych wzorów zamkniętych. W pozostałych przypadkach (na przykład ośrodek ograniczony) należy stosować całkowanie numeryczne.

W przypadku szczególnym dla płaszczyzny  $z=0$ , wprowadzając układ współrzędnych bezwymiarowych:

$$r = \rho a, \quad z = \zeta a, \quad s = \frac{\eta}{a}, \quad (3.46)$$

wzory na przemieszczenia  $u_r$  oraz  $w$  zapiszemy następująco:

$$u_r(\rho, 0) = \frac{ap}{E} \hat{u}_r(\rho, 0), \quad w(\rho, 0) = \frac{ap}{E} \hat{w}(\rho, 0), \quad (3.47)$$

gdzie:

$$\hat{u}_r(\rho, 0) = -\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2} \begin{cases} \rho, & 0 \leq \rho \leq 1, \\ \frac{1}{\rho}, & \rho \geq 1, \end{cases} \quad (3.48)$$

$$\hat{w}(\rho, 0) = \frac{4(1-\nu^2)}{\pi} \begin{cases} \hat{E}(\rho^2), & 0 \leq \rho \leq 1, \\ \rho \hat{E}\left(\frac{1}{\rho^2}\right) + \frac{(1-\rho^2)}{\rho} \hat{K}\left(\frac{1}{\rho^2}\right), & \rho \geq 1, \end{cases}$$

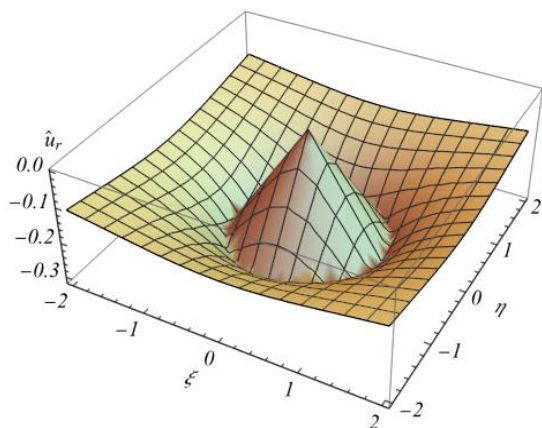
w których funkcje eliptyczne, występujące we wzorze (3.48)<sub>2</sub>, zdefiniowane są następująco<sup>37/</sup>:

$$\hat{E}(\rho) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \rho \sin^2 \theta} d\theta, \quad \hat{K}(\rho) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \rho \sin^2 \theta}} d\theta. \quad (3.49)$$

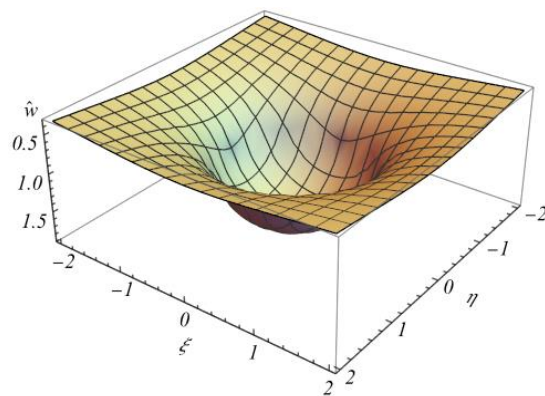
Na rys.3.39-3.42 przedstawiono wykresy przemieszczeń  $\hat{u}_r(\rho, 0)$  oraz  $\hat{w}(\rho, 0)$ .

<sup>37/</sup> Dokładniej o funkcjach eliptycznych oprogramowanych w *Wolfram Mathematica* – patrz dokumentacja Wolfram [78].

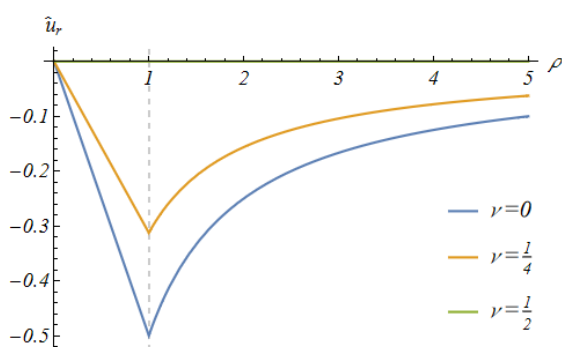




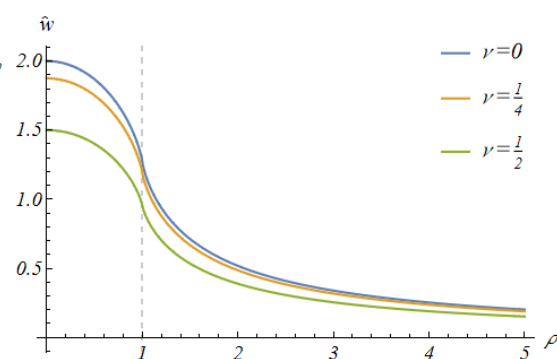
Rys.3.39. Wykres  $\hat{u}_r(\xi, \eta, 0)$  dla  $\nu=1/4$ .



Rys.3.40. Wykres  $\hat{w}(\xi, \eta, 0)$  dla  $\nu=1/4$ .



Rys.3.41. Wykres  $\hat{u}_r(\rho, 0)$ .



Rys.3.42. Wykres  $\hat{w}(\rho, 0)$ .

W przypadku ustalonej zmiennej radialnej  $\rho$  również istnieje możliwość otrzymania funkcji zmienności po głębokości przemieszczeń w postaci analitycznych wzorów zamkniętych, które zapiszemy następująco:

$$u_r(1, \zeta) = \frac{ap}{E} \hat{u}_r(1, \zeta), \quad w(0, \zeta) = \frac{ap}{E} \hat{w}(0, \zeta), \quad (3.50)$$

gdzie:

$$\hat{u}_r(1, \zeta) = \frac{\zeta(1+\nu)}{\pi} \left[ \pi(1-\nu) - \hat{K}\left(-\frac{4}{\zeta^2}\right) - (1-2\nu)\hat{E}\left(-\frac{4}{\zeta^2}\right) \right], \quad (3.51)$$

$$\hat{w}(0, \zeta) = \frac{(1+\nu) \left[ 2(1-\nu) + \zeta(1-2\nu)(\zeta - \sqrt{1+\zeta^2}) \right]}{\sqrt{1+\zeta^2}}.$$

Natomiast funkcje zmienności naprężeń po głębokości zapiszemy w postaci<sup>38/</sup>:

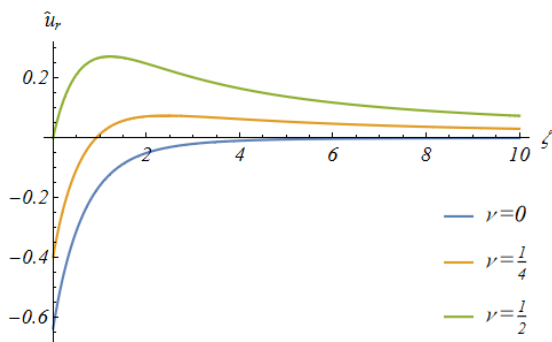
<sup>38/</sup> W monografii [61], s. 97 również przedstawiono wzory zależności maksymalnych naprężeń  $\sigma_{zz}$  od głębokości. W bardzo dobrej monografii [81], s. 101, we wzorze 4.9 jest błąd drukarski (por. wz.(3.52)<sub>1</sub>).

$$\sigma_{zz}(0, \zeta) = p \left( \frac{\zeta^3}{(\sqrt{1+\zeta^2})^3} - 1 \right), \quad (3.52)$$

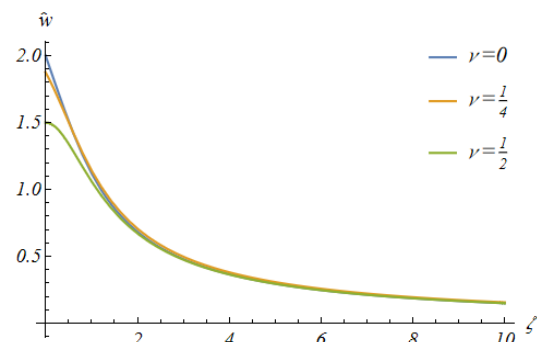
$$\sigma_{rz}(1, \zeta) = -\frac{p\zeta}{\pi} \left[ \frac{2+\zeta^2}{4+\zeta^2} \hat{E}\left(-\frac{4}{\zeta^2}\right) - \hat{K}\left(-\frac{4}{\zeta^2}\right) \right].$$

Funkcje przemieszczeń (3.47)<sub>2</sub>, (3.50)<sub>2</sub> oraz (3.52)<sub>1</sub> zostały otrzymane między innymi, w nieco innej postaci, w monografii [61], s. 94-97.

Na rys.3.43-3.44 przedstawiono wykresy zanikania wraz z głębokością przemieszczeń  $\hat{u}_r(1, \zeta)$  oraz  $\hat{w}(0, \zeta)$ .



Rys.3.43. Wykres  $\hat{u}_r(1, \zeta)$ .



Rys.3.44. Wykres  $\hat{w}(0, \zeta)$ .

Maksymalne przemieszczenia  $u_{r,max}$  i  $w_{max}$  są równe

$$u_{r,max} = u_r(1,0) = -\frac{ap(1+\nu)(1-2\nu)}{2E}, \quad (3.53)$$

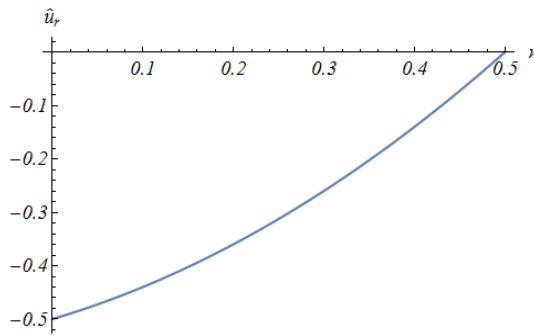
$$w_{max} = w(0,0) = \frac{2ap(1-\nu^2)}{E},$$

a przemieszczenie pionowe na granicy przyłożonego obciążenia wynosi

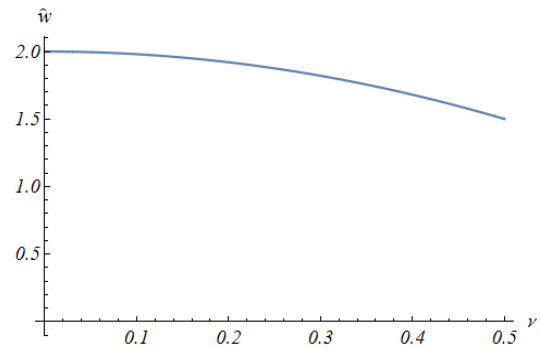
$$w(1,0) = \frac{4ap(1-\nu^2)}{E\pi}. \quad (3.54)$$

Wzory na maksymalne przemieszczenia pionowe (3.53)<sub>1,2</sub> są dobrze znane w literaturze, na przykład w monografiach [61], [62].

Na rys.3.45-3.46 przedstawiono wykresy zależności maksymalnych przemieszczeń  $\hat{u}_r(1,0,\nu)$  oraz  $\hat{w}(0,0,\nu)$  od współczynnika Poissona.



Rys.3.45. Wykres  $\hat{u}_r(1,0,\nu)$ .



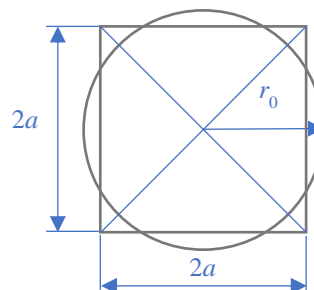
Rys.3.46. Wykres  $\hat{w}(0,0,\nu)$ .

Z rys.3.45-3.46 wynika, że w przypadku obciążenia półprzestrzeni w kształcie koła przemieszczenia poziome warstwy powierzchniowej  $\hat{u}_r(1,0,\nu)$  są równe zeru dla  $\nu=1/2$ , natomiast przemieszczenia pionowe  $\hat{w}(0,0,\nu)$  są różne od zera, podobnie jak w przypadku półprzestrzeni obciążonej w kształcie prostokąta (patrz rys.3.22-3.23).

Interesujące jest porównanie maksymalnych przemieszczeń półprzestrzeni, podanej obciążeniu  $p=const$  przy jednakowych powierzchniach kwadratu i koła. Powierzchnia kwadratu  $S_{kw}=4a^2$  jest równa powierzchni koła  $S_k=\pi r_0^2$  wtedy, gdy promień koła  $r_0$  wynosi:  $r_0 = \frac{2a}{\sqrt{\pi}}$  (rys.3.47).

Ze wzoru (3.27)<sub>3</sub>, maksymalne przemieszczenie w środku kwadratu jest równe  $w_{kw} = 2,244 \frac{ap(1-\nu^2)}{E}$ , a w centrum koła, o powierzchni równej powierzchni kwadratu  $w_k = 2,256 \frac{ap(1-\nu^2)}{E}$ .

Widoczne jest, że przemieszczenie w centrum koła jest większe od przemieszczenia środka prostokąta, przy równości pól obciążeń  $S_{kw}=S_k$ <sup>39/</sup>.

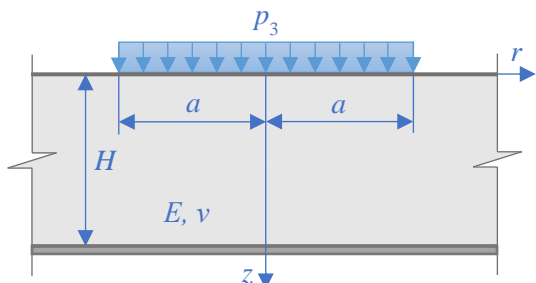


Rys.3.47. Schemat obciążenia w kształcie koła i kwadratu.

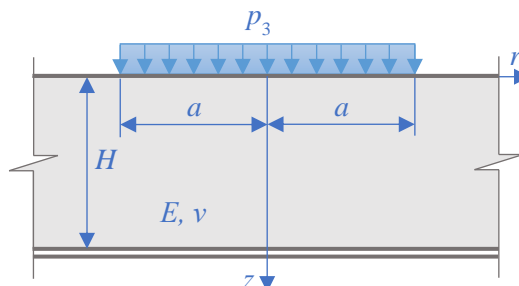
<sup>39/</sup> Z tego przykładu wynika, że wyznaczenie współczynnika sztywności w modelu Winklera zależy między innymi od kształtu płytki wciskanej w grunt.

### 3.3.2 Warstwa spoczywająca na nieodkształcalnym podłożu<sup>40/</sup>

Rozpatrzmy dwa przypadki obciążenia w kształcie koła, działającego na warstwę sprężystą, różniące się tylko warunkami brzegowymi: warstwa utwierdzona oraz warstwa z poślizgiem (rys.3.48-3.49).



Rys.3.48. Warstwa spoczywająca na sztywnej bazie bez poślizgu.



Rys.3.49. Warstwa spoczywająca na sztywnej bazie z poślizgiem.

Podobnie jak i w podpunkcie 3.3.1, do rozwiązania równania biharmonicznego (3.41) zastosujemy transformatę całkową Hankela podaną wzorem (3.42) i jej odwrotność (3.43). Pełne rozwiązanie znajduje się w Załączniku 2.

W przypadku warstwy utwierdzonej (rys.3.48), warunki na brzegach, zakładając, że  $p_3=p=const$  są następujące:

$$\tilde{\sigma}_{zz}|_{z=0} = -\tilde{p}_3 = -\frac{ap}{s} J_1(as), \quad \tilde{\sigma}_{rz}|_{z=0} = 0, \quad \tilde{u}_r|_{z \rightarrow H} = 0, \quad \tilde{w}|_{z \rightarrow H} = 0. \quad (3.55)$$

Natomiast w przypadku warstwy z poślizgiem (rys.3.49) warunki na brzegach, przy założeniu, że  $p_3=p=const$  są następujące:

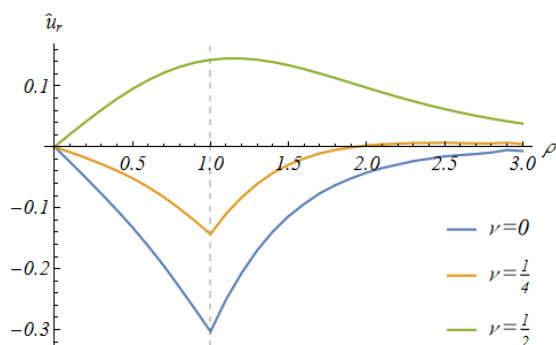
$$\tilde{\sigma}_{zz}|_{z=0} = -\tilde{p}_3 = -\frac{ap}{s} J_1(as), \quad \tilde{\sigma}_{rz}|_{z=0} = 0, \quad \tilde{\sigma}_{rz}|_{z \rightarrow H} = 0, \quad \tilde{w}|_{z \rightarrow H} = 0. \quad (3.56)$$

Obliczanie odwrotnych transformat przemieszczeń oraz naprężeń w analitycznej postaci jest kłopotliwe. Jak wspomniano wyżej, możliwe jest ich obliczenie w przypadkach szczególnych (np. dla półpłaszczyzny oraz dla ustalonych zmiennych  $r$  lub  $z$ ). W tym przypadku należy stosować całkowanie numeryczne, które zostało wykonane za pomocą programu *Wolfram Mathematica 13*. Składnia komendy całkowania numerycznego *NIntegrate* jest następująca:

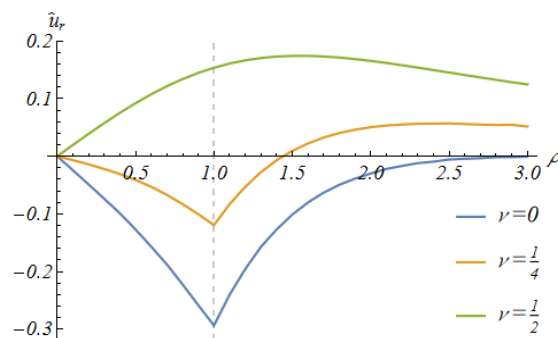
*NIntegrate*[ $\tilde{w}, \{\eta, 0, \infty\}, Method \rightarrow GaussKronrodRule, MaxRecursion \rightarrow 100$ ].

<sup>40/</sup> Rozwiązania warstwy na nieodkształcalnym podłożu szczegółowo badano między innymi w pracy [61], s. 159-180.

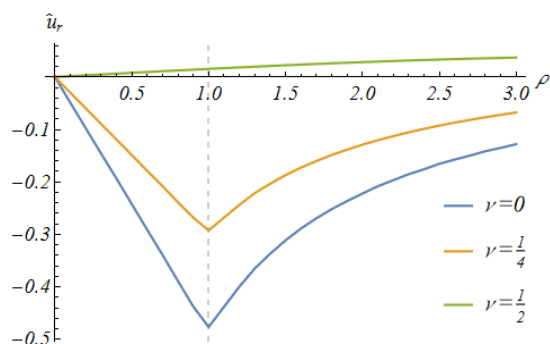
Na rys.3.50-3.57 przedstawiono wykresy przemieszczeń  $\hat{u}_r(\rho, 0)$ ,  $\hat{w}(\rho, 0)$ , sporządzone dla warstwy utwardzonej oraz warstwy z poślizgiem<sup>41/</sup>.



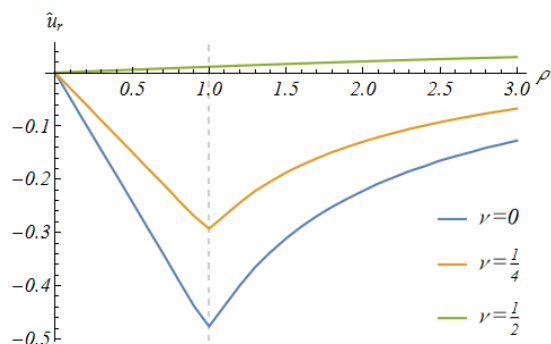
Rys.3.50. Wykres przemieszczeń  $\hat{u}_r(\rho, 0)$  dla warstwy utwardzonej,  $\lambda=1$ .



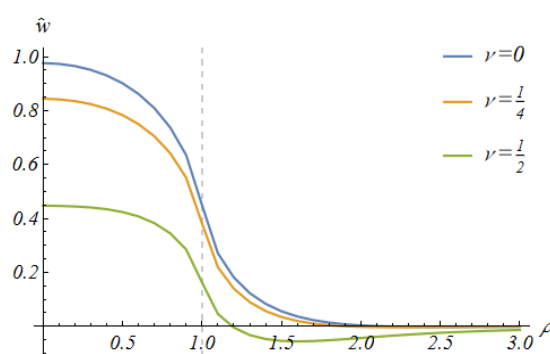
Rys.3.51. Wykres przemieszczeń  $\hat{u}_r(\rho, 0)$  dla warstwy z poślizgiem,  $\lambda=1$ .



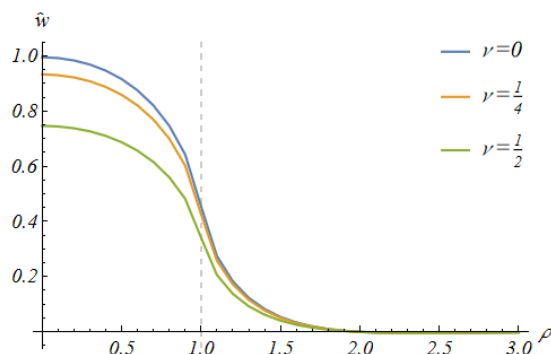
Rys.3.52. Wykres przemieszczeń  $\hat{u}_r(\rho, 0)$  dla warstwy utwardzonej,  $\lambda=5$ .



Rys.3.53. Wykres przemieszczeń  $\hat{u}_r(\rho, 0)$  dla warstwy z poślizgiem,  $\lambda=5$ .

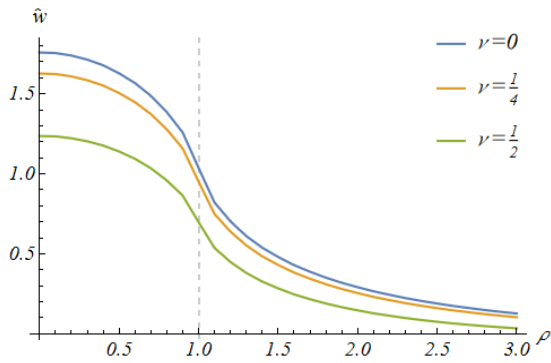


Rys.3.54. Wykres przemieszczeń  $\hat{w}(\rho, 0)$  dla warstwy utwardzonej,  $\lambda=1$ .

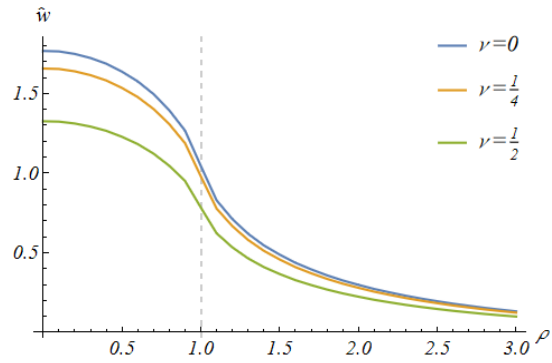


Rys.3.55. Wykres przemieszczeń  $\hat{w}(\rho, 0)$  dla warstwy z poślizgiem,  $\lambda=1$ .

<sup>41/</sup> Wykresy przemieszczeń sporządzone za pomocą komendy *ListLinePlot*.



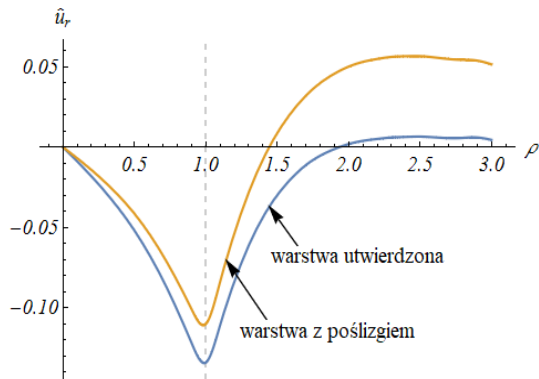
Rys.3.56. Wykres przemieszczeń  $\hat{w}(\rho, 0)$  dla warstwy utwardzonej,  $\lambda=5$ .



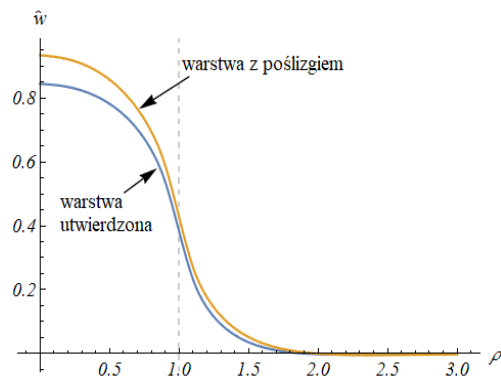
Rys.3.57. Wykres przemieszczeń  $\hat{w}(\rho, 0)$  dla warstwy z poślizgiem,  $\lambda=5$ .

Z rys.3.50-3.57 wynika, że największe wartości przemieszczeń pionowych są dla  $\nu=0$ , a najmniejsze dla  $\nu=1/2$ . Natomiast przemieszczenia poziome dla  $\nu=0$  i  $\nu=1/4$ , w granicach przyłożonego obciążenia, są ujemne, a dla  $\nu=1/2$  – dodatnie.

Na rys.3.58-3.59 przedstawiono porównawcze wykresy przemieszczeń  $\hat{u}_r(\rho, 0)$ ,  $\hat{w}(\rho, 0)$ , sporządzone dla warstwy utwardzonej oraz warstwy z poślizgiem.



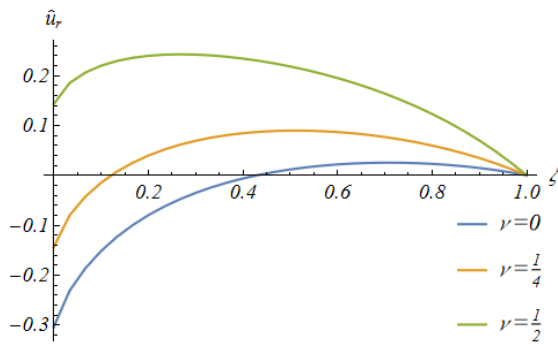
Rys.3.58. Wykres  $\hat{u}_r(\rho, 0)$  dla  $\nu=1/4$ ,  $\lambda=1$ .



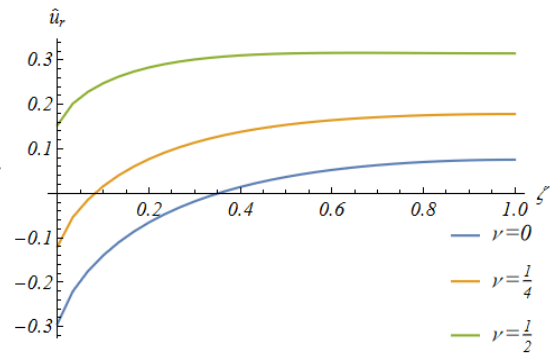
Rys.3.59. Wykres  $\hat{w}(\rho, 0)$  dla  $\nu=1/4$ ,  $\lambda=1$ .

Z rys.3.58-3.59 wynika, że w przypadku warstwy utwardzonej przemieszczenia poziome są większe niż dla warstwy z poślizgiem. Natomiast przemieszczenia pionowe warstwy z poślizgiem są większe od przemieszczeń warstwy utwardzonej.

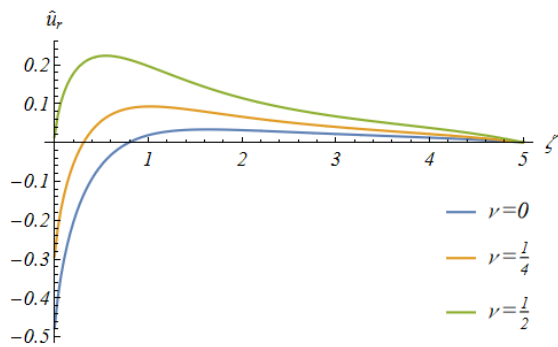
Na rys.3.60-3.67 przedstawiono wykresy zanikania przemieszczeń  $\hat{u}_r(1, \zeta)$ ,  $\hat{w}(0, \zeta)$  wraz z głębokością, sporządzone dla warstwy utwardzonej oraz warstwy z poślizgiem.



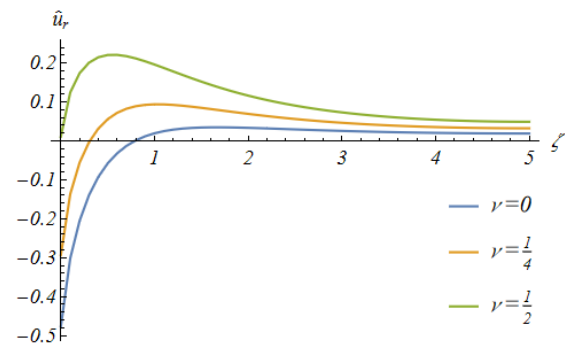
Rys.3.60. Wykres przemieszczeń  $\hat{u}_r(1, \zeta)$  dla warstwy utwierdzonej,  $\lambda=1$ .



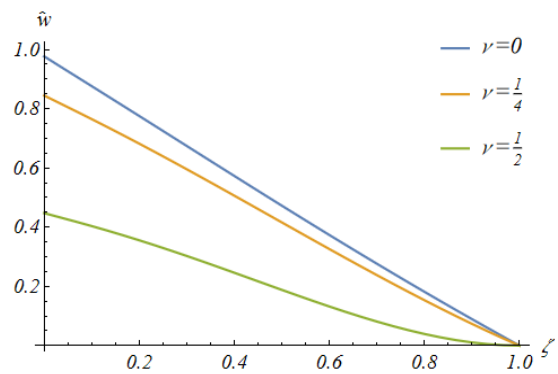
Rys.3.61. Wykres przemieszczeń  $\hat{u}_r(1, \zeta)$  dla warstwy z poślizgiem,  $\lambda=1$ .



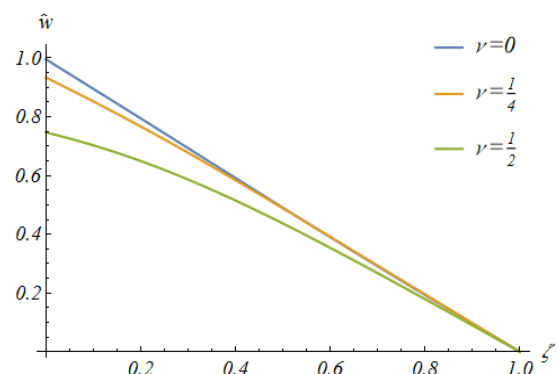
Rys.3.62. Wykres przemieszczeń  $\hat{u}_r(1, \zeta)$  dla warstwy utwierdzonej,  $\lambda=5$ .



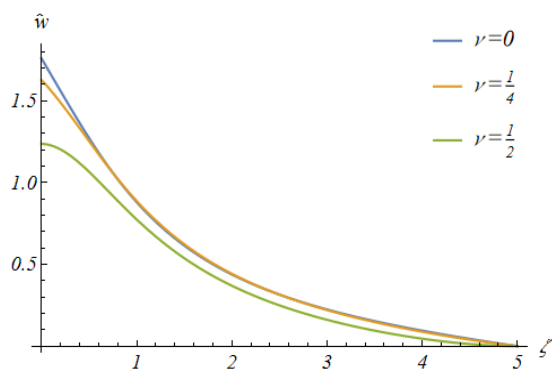
Rys.3.63. Wykres przemieszczeń  $\hat{u}_r(1, \zeta)$  dla warstwy z poślizgiem,  $\lambda=5$ .



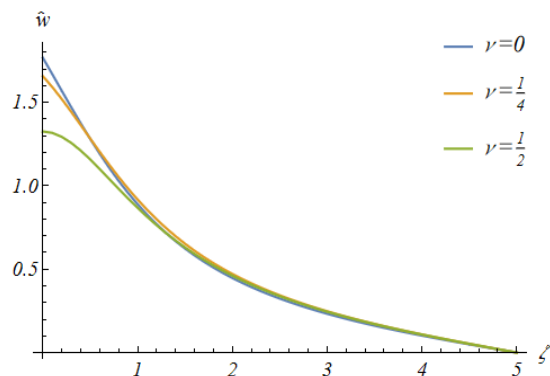
Rys.3.64. Wykres przemieszczeń  $\hat{w}(0, \zeta)$  dla warstwy utwierdzonej,  $\lambda=1$ .



Rys.3.65. Wykres przemieszczeń  $\hat{w}(0, \zeta)$  dla warstwy z poślizgiem,  $\lambda=1$ .

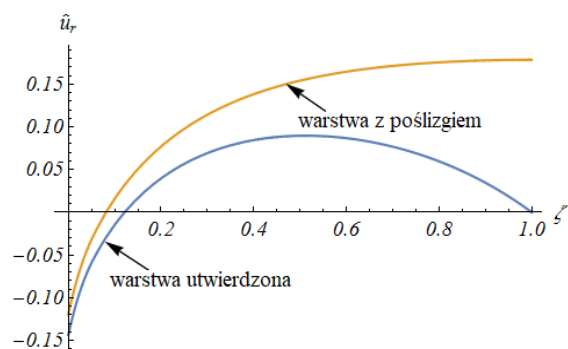


Rys.3.66. Wykres przemieszczeń  $\hat{w}(0, \zeta)$  dla warstwy utwardzonej,  $\lambda=5$ .

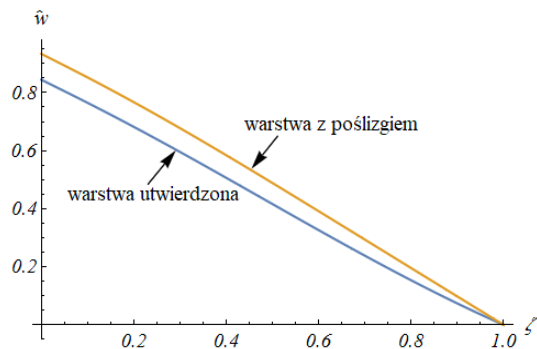


Rys.3.67. Wykres przemieszczeń  $\hat{w}(0, \zeta)$  dla warstwy z poślizgiem,  $\lambda=5$ .

Na rys.3.68-3.69 przedstawiono porównawcze wykresy zanikania przemieszczeń  $\hat{u}_r(1, \zeta)$  oraz  $\hat{w}(0, \zeta)$  wraz z głębokością, sporządzone dla warstwy utwardzonej oraz warstwy z poślizgiem.

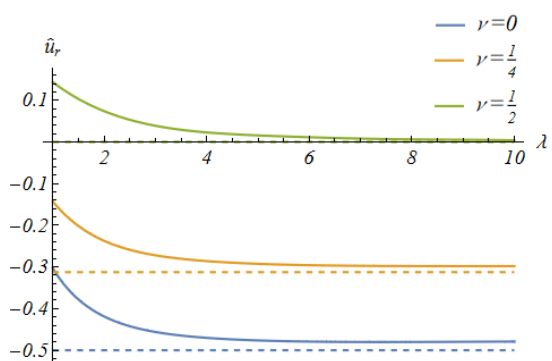


Rys.3.68. Wykres  $\hat{u}_r(1, \zeta)$  dla  $\nu=1/4, \lambda=1$ .

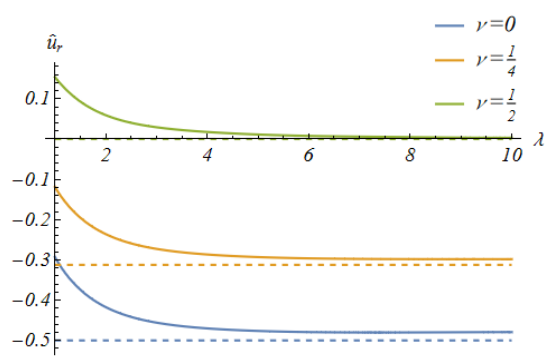


Rys.3.69. Wykres  $\hat{w}(0, \zeta)$  dla  $\nu=1/4, \lambda=1$ .

Na rys.3.70-3.73 przedstawiono wykresy zależności maksymalnych przemieszczeń  $\hat{u}_r(1, 0, \lambda)$  oraz  $\hat{w}(0, 0, \lambda)$  od  $\lambda$ .

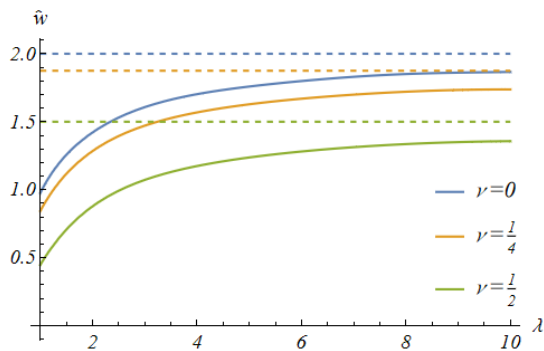


Rys.3.70. Wykres przemieszczeń  $\hat{u}_r(1, 0, \lambda)$  dla warstwy utwardzonej.

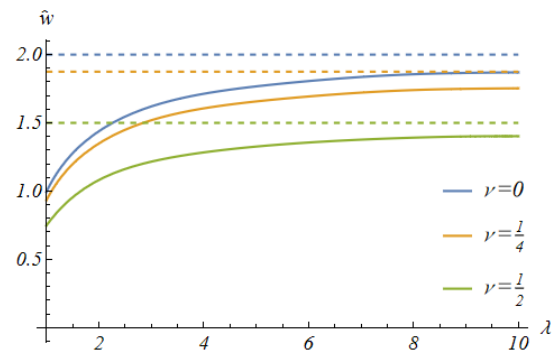


Rys.3.71. Wykres przemieszczeń  $\hat{u}_r(1, 0, \lambda)$  dla warstwy z poślizgiem.



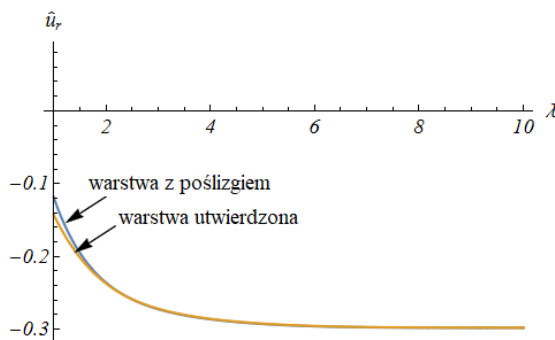


Rys.3.72. Wykres przemieszczeń  $\hat{w}(0,0,\lambda)$  dla warstwy utwierdzonej.

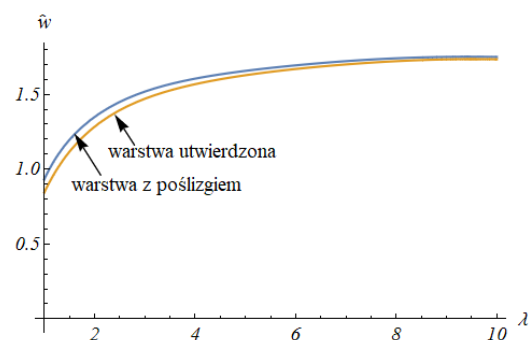


Rys.3.73. Wykres przemieszczeń  $\hat{w}(0,0,\lambda)$  dla warstwy z poślizgiem.

Na rys.3.74-3.75 przedstawiono porównawcze wykresy zależności od  $\lambda$  maksymalnych przemieszczeń  $\hat{u}_r(1,0,\lambda)$ ,  $\hat{w}(0,0,\lambda)$  dla warstwy utwierdzonej oraz warstwy z poślizgiem.



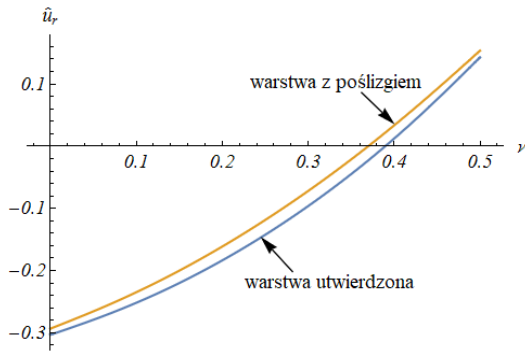
Rys.3.74. Wykres  $\hat{u}_r(1,0,\lambda)$  dla  $\nu=1/4$ .



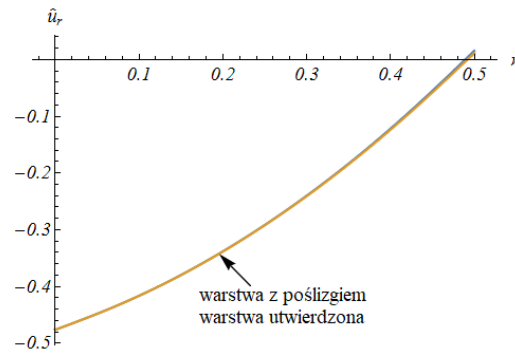
Rys.3.75. Wykres  $\hat{w}(0,0,\lambda)$  dla  $\nu=1/4$ .

Jak wynika z powyższych wykresów, maksymalne przemieszczenie zależy od przyjętych warunków brzegowych. W przypadku warstwy z poślizgiem maksymalne przemieszczenie pionowe jest większe od maksymalnego przemieszczenia warstwy utwierdzonej (rys.3.75). Wraz ze wzrostem  $\lambda$  przemieszczenia w obu przypadkach dążą do rozwiązania otrzymanego dla półprzestrzeni sprężystej. Natomiast wartości maksymalnego przemieszczenia poziomego nieznacznie zależą od warunków brzegowych i już dla  $\lambda=2$  wyniki się pokrywają (rys.3.74).

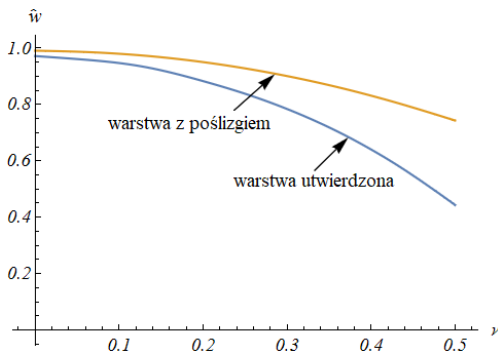
Na rys.3.76-3.79 przedstawiono wykresy zależności przemieszczeń  $\hat{u}_r(1,0,\nu)$ ,  $\hat{w}(0,0,\nu)$  od współczynnika Poissona, sporządzone dla warstwy utwierdzonej oraz warstwy z poślizgiem.



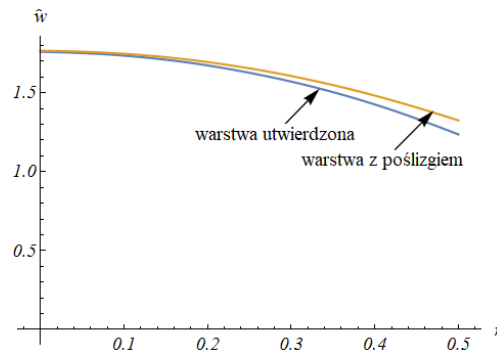
Rys.3.76. Wykres  $\hat{u}_r(1,0,\nu)$  dla  $\lambda=1$ .



Rys.3.77. Wykres  $\hat{u}_r(1,0,\nu)$  dla  $\lambda=5$ .



Rys.3.78. Wykres  $\hat{w}(0,0,\nu)$  dla  $\lambda=1$ .



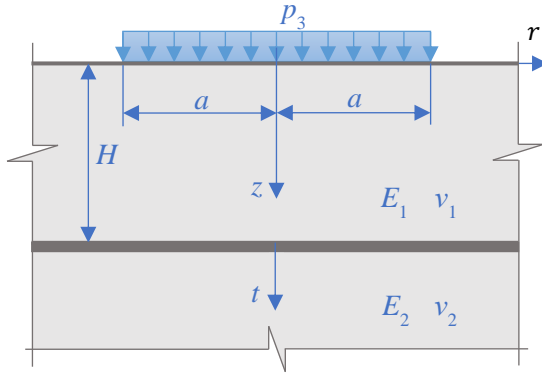
Rys.3.79. Wykres  $\hat{w}(0,0,\nu)$  dla  $\lambda=5$ .

Z rys.3.76-3.79 wynika, że w odróżnieniu od półprzestrzeni sprężystej (patrz rys.3.45) maksymalne przemieszczenia poziome warstwy  $\hat{u}_r(1,0)$  dla  $\nu=1/2$  są różne od zera. Wraz ze wzrostem  $\lambda$  różnica pomiędzy maksymalnym przemieszczeniem poziomym warstwy o warunkach brzegowych odpowiadających warstwie z poślizgiem oraz warstwie utwierdzonej maleje i dla  $\lambda=5$  wyniki prawie się pokrywają. Natomiast maksymalne przemieszczenia pionowe znacznie zależą od przyjętych warunków brzegowych, w szczególności dla małych wartości  $\lambda$ .

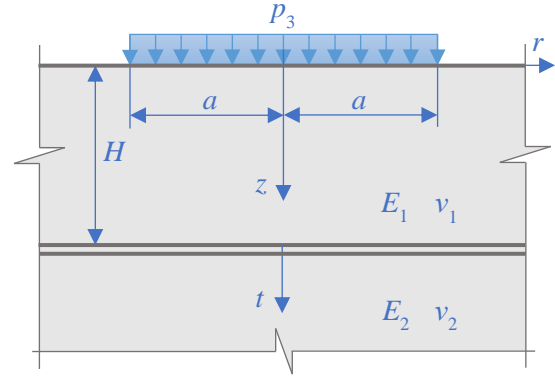
### 3.3.3 Warstwa spoczywająca na półprzestrzeni sprężystej<sup>42/</sup>

Rozpatrzmy zagadnienie obciążenia na powierzchni w kształcie koła o promieniu  $a$ , działającego na warstwę o miąższości  $H$ , spoczywającą na półprzestrzeni sprężystej. Będziemy rozpatrywać dwa przypadki połączenia warstwy z półprzestrzenią: warstwę utwierdzoną (rys.3.80.) oraz warstwę z poślizgiem na półprzestrzeni sprężystej (rys.3.81).

<sup>42/</sup> Zagadnienie warstwy na półprzestrzeni sprężystej szczegółowo badano między innymi w pracy [61], s. 181.



Rys.3.80. Warstwa utwierdzona na półprzestrzeni.



Rys.3.81. Warstwa z poślizgiem na półprzestrzeni.

Transformata funkcji Love'a w obszarze warstwy jest następująca

$$\tilde{\chi}_1 = C_1 e^{-sz} + \frac{C_2}{a} z e^{-sz} + C_3 e^{sz} + \frac{C_4}{a} z e^{sz}, \quad (3.57)$$

natomiast dla półprzestrzeni funkcja Love'a ma postać

$$\tilde{\chi}_2 = B_1 e^{-sz} + \frac{B_2}{a} z e^{-sz}, \quad (3.58)$$

gdzie  $C_i$  oraz  $B_j$  są stałymi całkowania ( $i=1, 2, 3, 4, j=1, 2$ )<sup>43/</sup>.

Warunki brzegowe i warunki ciągłości transformat naprężeń i przemieszczeń w przypadku warstwy sztywno połączonej z półprzestrzenią zapisujemy w postaci:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{z_1} \Big|_{z=0} = -\tilde{p}_3 = -\frac{ap}{s} J_1(as), \quad \tilde{\sigma}_{r_1} \Big|_{z=0} = 0, \quad \tilde{\sigma}_{z_1} \Big|_{z=H} = \tilde{\sigma}_{z_2} \Big|_{t=0}, \\ \tilde{\sigma}_{r_1} \Big|_{z=H} = \tilde{\sigma}_{r_2} \Big|_{t=0}, \quad \tilde{u}_{r_1} \Big|_{z=H} = \tilde{u}_{r_2} \Big|_{t=0}, \quad \tilde{w}_1 \Big|_{z=H} = \tilde{w}_2 \Big|_{t=0}, \end{aligned} \quad (3.59)$$

a dla warstwy z poślizgiem na półprzestrzeni sprężystej:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{z_1} \Big|_{z=0} = -\tilde{p}_3 = -\frac{ap}{s} J_1(as), \quad \tilde{\sigma}_{r_1} \Big|_{z=0} = 0, \quad \tilde{\sigma}_{z_1} \Big|_{z=H} = \tilde{\sigma}_{z_2} \Big|_{t=0}, \\ \tilde{\sigma}_{r_1} \Big|_{z=H} = 0, \quad \tilde{\sigma}_{r_2} \Big|_{t=0} = 0, \quad \tilde{w}_1 \Big|_{z=H} = \tilde{w}_2 \Big|_{t=0}. \end{aligned} \quad (3.60)$$

W celu wykonania odwrotnej transformacji Hankela funkcji przemieszczeń, konieczne jest stosowanie całkowania numerycznego, które zostało wykonane w programie *Wolfram Mathematica 13*. Składnia komendy *NIntegrate* jest następująca: *NIntegrate* $[\tilde{w}, \{\eta, 0, \infty\}, \text{Method} \rightarrow \text{GaussKronrodRule}, \text{MaxRecursion} \rightarrow 100]$ .

Wykresy przemieszczeń zostały sporządzone za pomocą komendy *ListLinePlot*.

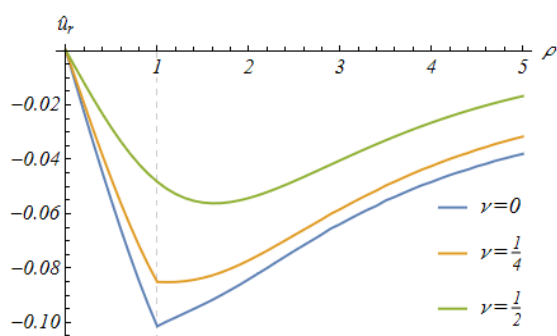
Obliczenie retransformat przemieszczeń oraz wykresy zostały wykonane w układzie współrzędnych bezwymiarowych

<sup>43/</sup> Stałe całkowania, ze względu na skomplikowaną postać, nie podajemy w tej pracy.

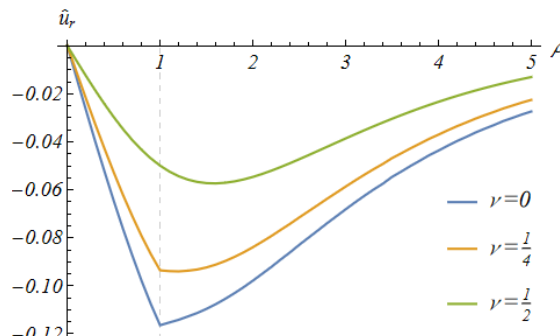
$$r = \rho a, \quad z = \zeta a, \quad t = \tau a, \quad s = \frac{\eta}{a}, \quad \lambda = \frac{H}{a}. \quad (3.61)$$

Poniżej zostaną przedstawione charakterystyczne wykresy przemieszczeń, sporządzone dla następujących danych:  $E_1=10E_2$ ,  $\nu_1=\nu_2=\nu$ .

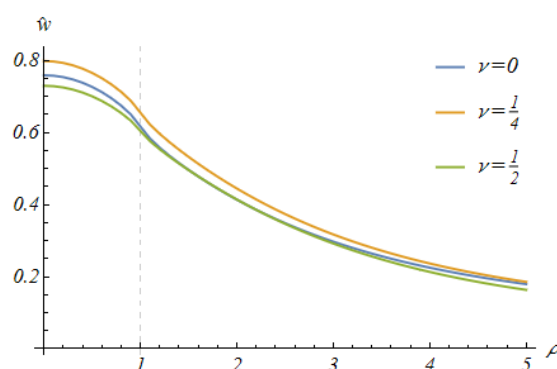
Na rys.3.82-3.85 przedstawiono, odpowiednio przeskalowane przez mnożnik  $E_2/ap^{44/}$ , wykresy przemieszczeń  $\hat{u}_r(\rho,0)$ ,  $\hat{w}(\rho,0)$ , sporządzone dla warstwy zespolonej oraz warstwy z poślizgiem na półprzestrzeni sprężystej.



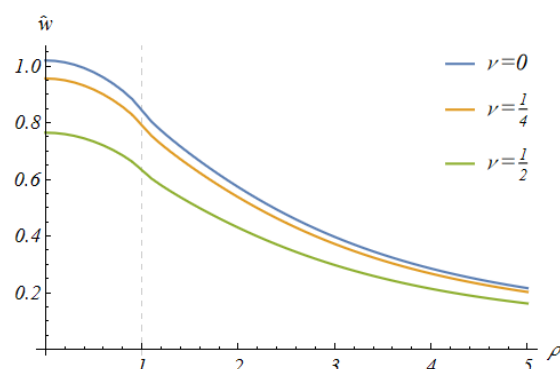
Rys.3.82. Wykres przemieszczeń  $\hat{u}_r(\rho,0)$  dla warstwy zespolonej z półprzestrzenią,  $\lambda=1$ .



Rys.3.83. Wykres przemieszczeń  $\hat{u}_r(\rho,0)$  dla warstwy z poślizgiem na półprzestrzeni,  $\lambda=1$ .



Rys.3.84. Wykres przemieszczeń  $\hat{w}(\rho,0)$  dla warstwy zespolonej z półprzestrzenią,  $\lambda=1$ .

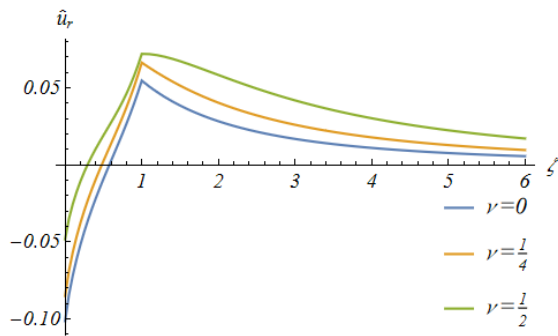


Rys.3.85. Wykres przemieszczeń  $\hat{w}(\rho,0)$  dla warstwy z poślizgiem na półprzestrzeni,  $\lambda=1$ .

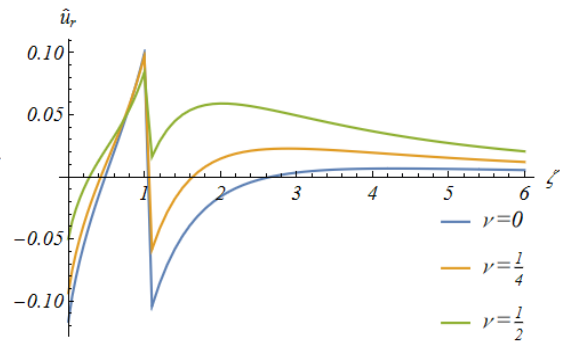
Z rys.3.84 wynika, że w odróżnieniu od warstwy na nieodkształcalnej bazie (rys.3.56-3.57) lub warstwy z poślizgiem na półprzestrzeni (rys.3.85), w przypadku warstwy sztywno połączonej z półprzestrzenią sprężystą największe przemieszczenia pionowe są dla współczynnika Poissona  $\nu=1/4$ .

Na rys.3.86-3.89 przedstawiono wykresy zanikania przemieszczeń  $\hat{u}_r(1,\zeta)$ ,  $\hat{w}(0,\zeta)$  wraz z głębokością, sporządzone dla warstwy zespolonej z półprzestrzenią oraz warstwy z poślizgiem na półprzestrzeni sprężystej.

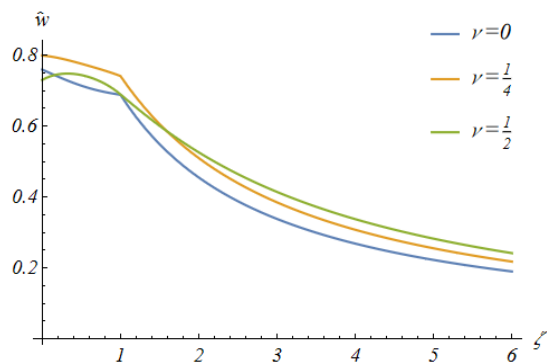
<sup>44/</sup> Por. odnośnik nr 32, na s. 44.



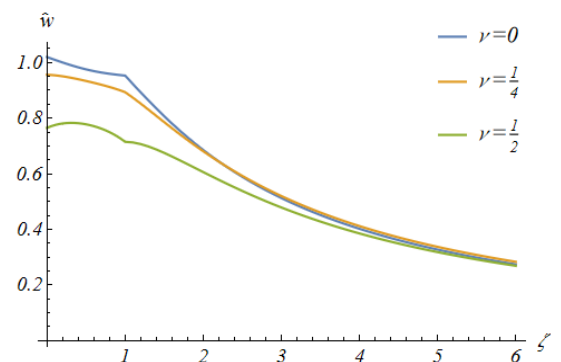
Rys.3.86. Wykres przemieszczeń  $\hat{u}_r(1, \zeta)$  dla warstwy zespolonej z półprzestrzenią,  $\lambda=1$ .



Rys.3.87. Wykres przemieszczeń  $\hat{u}_r(1, \zeta)$  dla warstwy z poślizgiem na półprzestrzeni,  $\lambda=1$ .

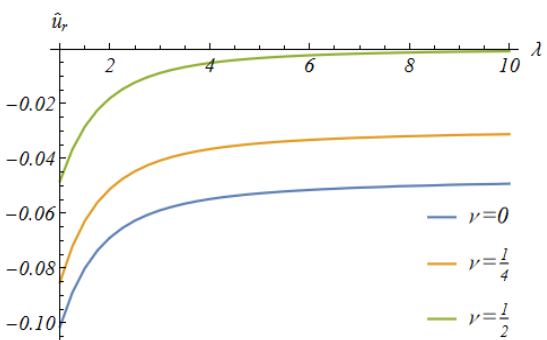


Rys.3.88. Wykres przemieszczeń  $\hat{w}(0, \zeta)$  dla warstwy zespolonej z półprzestrzenią dla  $\lambda=1$ .

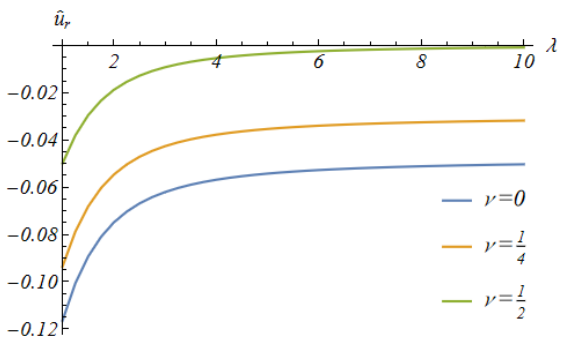


Rys.3.89. Wykres przemieszczeń  $\hat{w}(0, \zeta)$  dla warstwy z poślizgiem na półprzestrzeni dla  $\lambda=1$ .

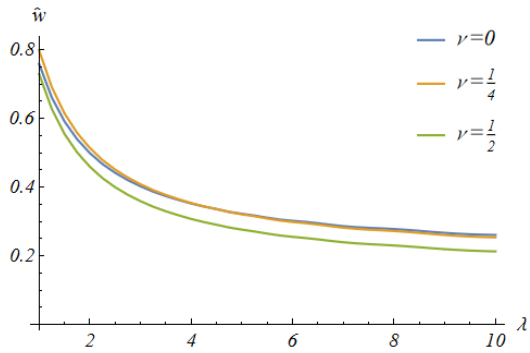
Na rys.3.90-3.93 przedstawiono wykresy zależności maksymalnych przemieszczeń  $\hat{u}_r(1, 0, \lambda)$  oraz  $\hat{w}(0, 0, \lambda)$  od  $\lambda$ .



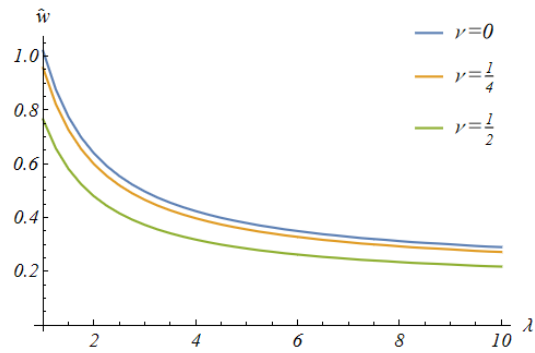
Rys.3.90. Wykres przemieszczeń  $\hat{u}_r(1, 0, \lambda)$  dla warstwy zespolonej z półprzestrzenią.



Rys.3.91. Wykres przemieszczeń  $\hat{u}_r(1, 0, \lambda)$  dla warstwy z poślizgiem na półprzestrzeni.



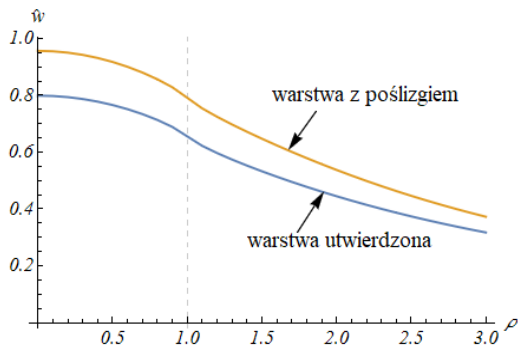
Rys.3.92. Wykres przemieszczeń  $\hat{w}(0,0,\lambda)$  dla warstwy zespolonej z półprzestrzenią.



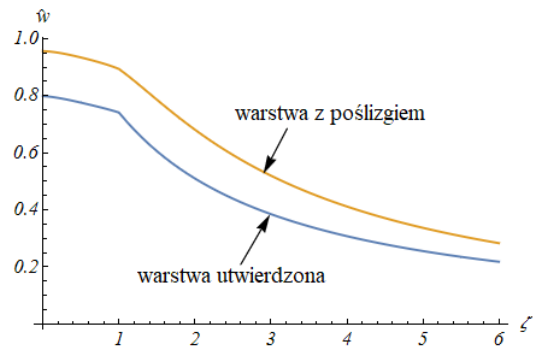
Rys.3.93. Wykres przemieszczeń  $\hat{w}(0,0,\lambda)$  dla warstwy z poślizgiem na półprzestrzeni.

Z rys.3.92-3.93 wynika, że maksymalne przemieszczenia pionowe  $\hat{w}(0,0,\lambda)$  wraz ze wzrostem miąższości warstwy  $\lambda$  dążą do  $1/5$  dla obu przypadków połączenia warstwy z półprzestrzenią. Maksymalne przemieszczenie pionowe warstwy zespolonej z półprzestrzenią osiąga się dla  $\nu=1/4$ , natomiast w przypadku warstwy z poślizgiem na półprzestrzeni – dla  $\nu=0$ .

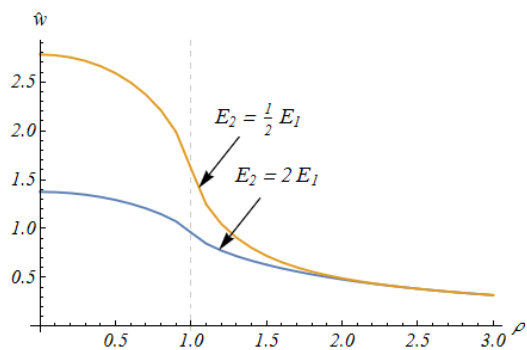
Na rys.3.94-3.99 przedstawiono porównawcze wykresy przemieszczeń pionowych  $\hat{w}(\rho,0)$ ,  $\hat{w}(0,\zeta)$ , sporządzone dla warstwy utwierdzonej oraz warstwy z poślizgiem na półprzestrzeni sprężystej.



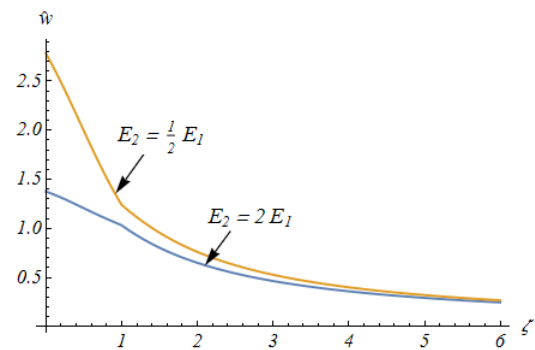
Rys.3.94. Wykres  $\hat{w}(\rho,0)$  dla  $\nu=1/4, \lambda=1$ .



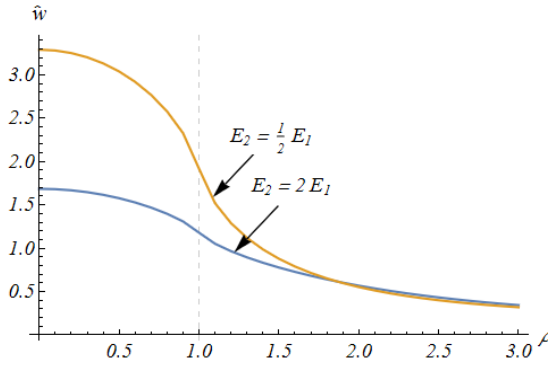
Rys.3.95. Wykres  $\hat{w}(\rho,0)$  dla  $\nu=1/4, \lambda=1$ .



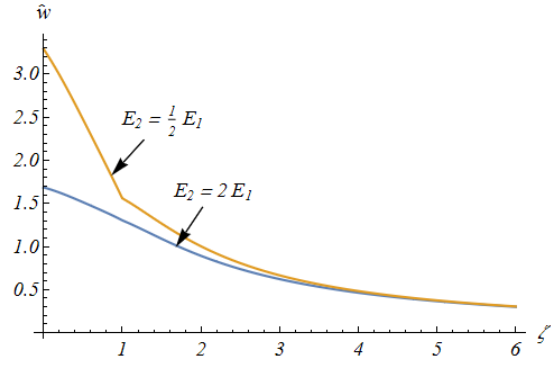
Rys.3.96. Wykres  $\hat{w}(\rho,0)$  dla warstwy zespolonej z półprzestrzenią dla  $\nu=1/4, \lambda=1$ .



Rys.3.97. Wykres  $\hat{w}(\rho,0)$  dla warstwy zespolonej z półprzestrzenią dla  $\nu=1/4, \lambda=1$ .



Rys.3.98. Wykres  $\hat{w}(0, \rho)$  dla warstwy z poślizgiem na półprzestrzeni dla  $\nu=1/4, \lambda=1$ .

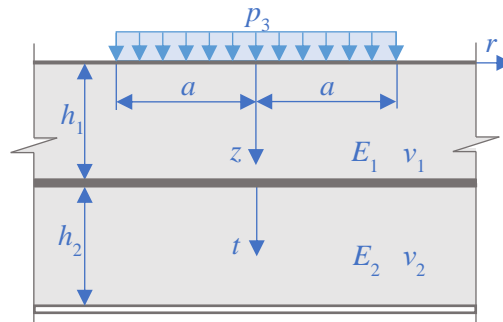


Rys.3.99. Wykres  $\hat{w}(0, \zeta)$  dla warstwy z poślizgiem na półprzestrzeni dla  $\nu=1/4, \lambda=1$ .

W przypadku warstwy sztywno połączonej z półprzestrzenią maksymalne przemieszczenia pionowe są mniejsze od maksymalnych przemieszczeń pionowych warstwy z poślizgiem na półprzestrzeni (rys.3.94-3.95).

### 3.3.4 Układ dwu warstw spoczywających na nieodkształcalnym podłożu<sup>45/</sup>

Rozpatrzmy zagadnienie warstwy sprężystej o miąższości  $h_1$ , znajdującej się na innej warstwie o miąższości  $h_2$ . Górna warstwa jest obciążona na powierzchni w kształcie koła o promieniu  $a$  (rys.3.100). W tym podpunkcie będziemy rozpatrywać przypadek, kiedy warstwy są sztywno połączone między sobą, natomiast druga warstwa jest połączona z poślizgiem z nieodkształcalną bazą.



Rys.3.100. Układ dwóch warstw sztywno połączonych.

Transformatę funkcji Love'a zapiszemy następująco:

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_1 &= C_1 e^{-sz} + \frac{C_2}{a} z e^{-sz} + C_3 e^{sz} + \frac{C_4}{a} z e^{sz}, \\ \tilde{\chi}_2 &= B_1 e^{-st} + \frac{B_2}{a} z e^{-st} + B_3 e^{st} + \frac{B_4}{a} z e^{st}, \end{aligned} \quad (3.62)$$

gdzie:  $C_i$  oraz  $B_j$  są stałymi całkowania ( $i, j=1, 2, 3, 4$ ).

<sup>45/</sup> Zagadnienie układu warstw szczegółowo badano między innymi w pracy [61], s. 207-217.

Warunki brzegowe i warunki ciągłości transformat zapisujemy w postaci:

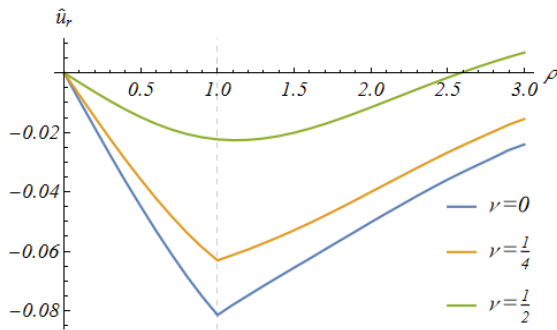
$$\begin{aligned}
 \tilde{\sigma}_{z_1} \Big|_{z=0} &= -\tilde{p}_3 = -\frac{ap}{s} J_1(as), \\
 \tilde{\sigma}_{r_{z_1}} \Big|_{z=0} &= 0, \quad \tilde{\sigma}_{z_1} \Big|_{z=h_1} = \tilde{\sigma}_{z_2} \Big|_{t=0}, \\
 \tilde{\sigma}_{r_{z_1}} \Big|_{z=h_1} &= \tilde{\sigma}_{r_{z_2}} \Big|_{t=0}, \quad \tilde{u}_{r_1} \Big|_{z=h_1} = \tilde{u}_{r_2} \Big|_{t=0}, \\
 \tilde{w}_1 \Big|_{z=h_1} &= \tilde{w}_2 \Big|_{t=0}, \quad \tilde{\sigma}_{r_{z_2}} \Big|_{t=h_2} = 0, \quad \tilde{w}_2 \Big|_{t=h_2} = 0.
 \end{aligned} \tag{3.63}$$

W tym przypadku, jak i w podpunkcie 3.3.3, w celu wykonania odwrotnej transformacji Hankela funkcji przemieszczeń, konieczne jest stosowanie całkowania numerycznego. Retransformaty obliczone w układzie współrzędnych bezwymiarowych

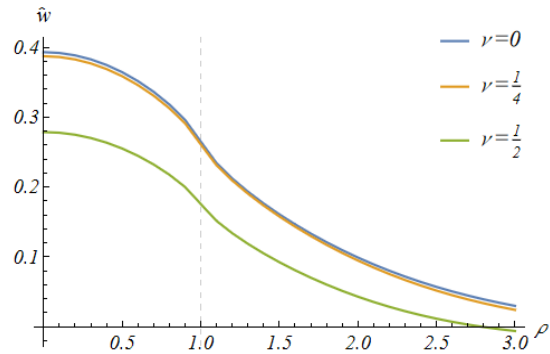
$$r = \rho a, \quad z = \zeta a, \quad t = \tau a, \quad s = \frac{\eta}{a}, \quad \lambda_1 = \frac{h_1}{a}, \quad \lambda_2 = \frac{h_2}{a}. \tag{3.64}$$

Poniżej zostaną przedstawione charakterystyczne wykresy przemieszczeń, sporządzone dla następujących danych:  $E_1=10E_2$ ,  $\nu_1=\nu_2=\nu$ .

Na rys.3.101-3.102 przedstawiono wykresy przemieszczeń  $\hat{u}_r(\rho, 0)$ ,  $\hat{w}(\rho, 0)$ , sporządzone dla układu dwóch sztywno połączonych warstw spoczywających na nieodkształcalnym podłożu<sup>46/</sup>.



Rys.3.101. Wykres  $\hat{u}_r(\rho, 0)$  dla  $\lambda_1=\lambda_2=1$ .

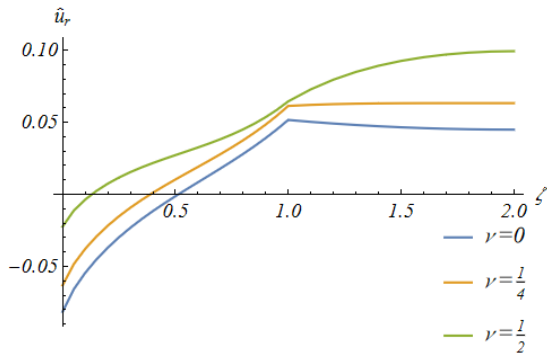


Rys.3.102. Wykres  $\hat{w}(\rho, 0)$  dla  $\lambda_1=\lambda_2=1$ .

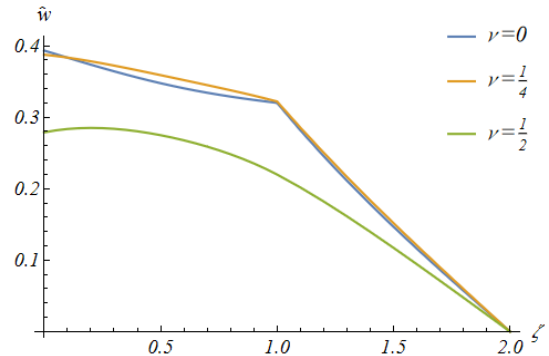
Na rys.3.103-3.104 przedstawiono wykresy zanikania maksymalnych przemieszczeń  $\hat{u}_r(1, \zeta)$ ,  $\hat{w}(0, \zeta)$  wraz z głębokością, sporządzone dla układu dwóch sztywno połączonych warstw, spoczywających na nieodkształcalnym podłożu.

<sup>46/</sup> Patrz odnośnik nr 32, na s. 44.



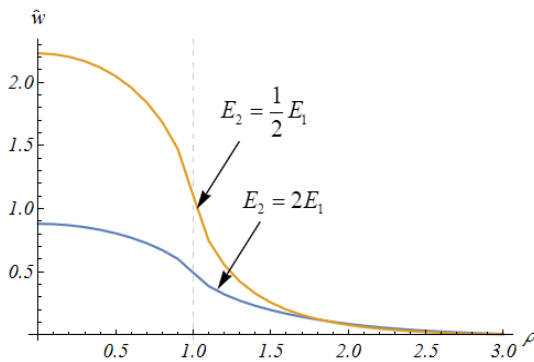


Rys.3.103. Wykres  $\hat{u}_r(1, \zeta)$  dla  $\lambda_1=\lambda_2=1$ .

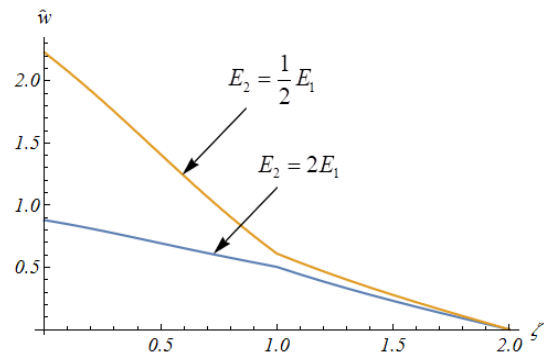


Rys.3.104. Wykres  $\hat{w}(0, \zeta)$  dla  $\lambda_1=\lambda_2=1$ .

Na rys.3.105-3.106 przedstawiono wykresy przemieszczeń pionowych  $\hat{w}(\rho, 0)$  oraz  $\hat{w}(0, \zeta)$ , sporządzone dla układu dwóch warstw sztywno połączonych, o różnych sztywnościach, spoczywających na nieodkształcalnej bazie.



Rys.3.105. Wykres  $\hat{w}(\rho, 0)$  dla  $\nu=1/4, \lambda_1=\lambda_2=1$ .



Rys.3.106. Wykres  $\hat{w}(0, \zeta)$  dla  $\nu=1/4, \lambda_1=\lambda_2=1$ .

Zagadnienie układu warstw, spoczywających na półprzestrzeni sprężystej lub nieodkształcalnej bazie, jest bardzo ważnym zagadnieniem w drogownictwie przy projektowaniu nawierzchni drogowych. W monografii [61], s. 210-217, rozpatrywano również układ dwóch warstw spoczywających na półprzestrzeni sprężystej.

W tej pracy, w celu weryfikacji zmodyfikowanego modelu podłoża Vlasova, ograniczamy się do wyznaczenia przemieszczeń tylko dla układu dwu warstw.

### 3.3.5 Półprzestrzeń i warstwa poprzecznie izotropowe

W Załączniku 2, pkt.7, podano równania konstytutywne ciała poprzecznie izotropowego. W monografii [61] przedstawiono zastosowanie funkcji naprężeń Love'a do

rozwiązania zadań osiowosymetrycznych. Składowe wektora przemieszczenia przedstawiono w następującej postaci<sup>47/</sup>:

$$u_r = -\left(\frac{1}{C_{11}} + \frac{1}{C_{44}}\right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial z}, \quad u_z = \frac{1}{C_{44}} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{C_{11}} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}. \quad (3.65)$$

Ostatecznie otrzymano równanie na funkcję  $\phi(r,z)$  w postaci

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 \phi}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial \phi}{\partial r} - \Theta_1 \left( \frac{\partial^4 \phi}{\partial r^2 \partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \phi}{\partial r \partial z^2} \right) + \Theta_2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial z^4} = 0, \quad (3.66)$$

w której:

$$\Theta_1 = \frac{2C_{13}}{C_{11}} + \frac{C_{13}^2}{C_{11}C_{44}} - \frac{C_{33}}{C_{44}}, \quad \Theta_2 = \frac{C_{33}}{C_{11}}. \quad (3.67)$$

Ponieważ autorzy monografii [61], przy definicji składowych wektora przemieszczenia (3.65), powołują się na prace [82] i [83], a w tych pracach nie znajdujemy definicji składowych wektora przemieszczenia w postaci (3.65), to poniżej przedstawiamy ogólne, autorskie wyprowadzenie wzorów na przemieszczenia.

Punktem wyjścia jest twierdzenie Helmholtza [11], s. 171:

$$u_r = S_1 \frac{\partial \phi}{\partial r} + S_2 \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad u_z = K_2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\varphi) - K_3 \frac{\partial \phi}{\partial z}. \quad (3.68)$$

Zauważmy, że przyjmując:

$$\varphi = \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad \phi = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad (3.69)$$

otrzymujemy następujące przedstawienie przemieszczeń:

$$u_r = K_1 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z}, \quad u_z = K_2 \nabla^2 \Phi + (K_3 - K_2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}, \quad (3.70)$$

gdzie:

$$K_1 = S_2 - S_1, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

$\Phi$  ma wymiar  $[Nm]$ , a wielkości  $K_1$ ,  $K_2$  i  $K_3$  mają wymiar  $[m^2 N^{-1}]$ .

Po wyznaczeniu odkształceń i naprężeń, a następnie podstawiając naprężenia do pierwszego warunku równowagi teorii sprężystości

<sup>47/</sup> W monografii [61] na s. 27 we wz. (3.12)<sub>1</sub> zakradł się błąd. Prawidłowy wzór (3.65)<sub>1</sub> jest postaci

$$u_r = -\frac{C_{13} + C_{44}}{C_{11}C_{44}}.$$

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\phi}{r} = 0, \quad (3.71)$$

otrzymujemy następujące równanie na funkcję naprężeń  $\Phi$

$$\begin{aligned} & r^2 [C_{44}K_1 + (C_{13} + C_{44})K_3] \frac{\partial^4 \Phi}{\partial r \partial z^3} + \\ & [C_{11}K_1 + (C_{13} + C_{44})K_2] \left( r \frac{\partial^3 \Phi}{\partial r^2 \partial z} + r^2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial r^3 \partial z} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z} \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Powyższe równanie będzie spełnione wtedy, gdy spełnione będą dwa równania na współczynniki  $K_1, K_2$  i  $K_3$

$$C_{11}K_1 + (C_{13} + C_{44})K_2 = 0, \quad C_{44}K_1 + (C_{13} + C_{44})K_3 = 0. \quad (3.73)$$

Z równań (3.73) wynika, że możemy wyznaczyć dwie wielkości zależne od dowolnej trzeciej. Przyjmując, na przykład, zależność:

$$K_1(K_2), \quad K_3(K_2), \quad (3.74)$$

rozwiązanie układu (3.73) zapisujemy w postaci:

$$K_1 = -\frac{C_{13} + C_{44}}{C_{11}} K_2, \quad K_3 = \frac{C_{44}}{C_{11}} K_2, \quad (3.75)$$

w której współczynnik  $K_2$  jest dowolny.

Po podstawieniu wielkości  $K_1$  i  $K_3$  do wzoru (3.70), a następnie po wyznaczeniu odkształceń i naprężeń, wstawiamy naprężenia do drugiego równania równowagi

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = 0. \quad (3.76)$$

Po przyjęciu współczynnika  $K_2=1/C_{44}$ , otrzymujemy równanie na funkcję naprężeń  $\Phi$ , które zapisujemy następująco<sup>48/</sup>

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \Theta_1 \left( \frac{\partial^4 \Phi}{\partial r^2 \partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial r \partial z^2} \right) + \Theta_2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial z^4} = 0, \quad (3.77)$$

gdzie  $\Theta_1$  i  $\Theta_2$  podane wzorem (3.67).

Rozwiązanie równania (3.77) dla transformat przewidujemy w postaci

$$\tilde{\Phi}(r, z, s) = J_0(rs) \tilde{f}(z), \quad (3.78)$$

gdzie  $s$  – parametr o wymiarze  $[m^{-1}]$ .

<sup>48/</sup> Przy przyjęciu zależności  $K_2(K_1), K_3(K_1)$ , otrzymujemy, dla odpowiedniego  $K_1$ , równanie (3.77). Otrzymane równanie (3.77) jest takie samo, jak otrzymane w pracy [61].

Po podstawieniu zależności (3.78) do równania (3.77) otrzymujemy równanie na funkcję  $\tilde{f}(z)$ <sup>49/</sup>

$$\Theta_2 \tilde{f}^{(4)}(z) + \Theta_1 s^2 \tilde{f}''(z) + s^4 \tilde{f}(z) = 0, \quad (3.79)$$

którego rozwiązanie jest następujące

$$\tilde{f}(z) = C_1 e^{\theta_1 s z} + C_2 e^{-\theta_1 s z} + C_3 e^{\theta_2 s z} + C_4 e^{-\theta_2 s z}, \quad (3.80)$$

gdzie oznaczono:

$$\theta_1 = \sqrt{-\frac{\Theta_1 + \sqrt{\Theta_1^2 - 4\Theta_2}}{2\Theta_2}}, \quad \theta_2 = \sqrt{-\frac{\Theta_1 - \sqrt{\Theta_1^2 - 4\Theta_2}}{2\Theta_2}}. \quad (3.81)$$

W przypadku półprzestrzeni stałe  $C_1$  i  $C_3$  są równe zero.

Dokonując całkowania funkcji (3.78) względem parametru  $s$ , otrzymamy

$$\Phi(r, z) = \int_0^{\infty} \tilde{\Phi}(r, z, s) ds. \quad (3.82)$$

Całkowanie transformat (3.78) jest uciążliwe. W większości przypadków, dla ośrodków ograniczonych, należy stosować całkowanie numeryczne. Natomiast w przypadku półprzestrzeni można uzyskać analityczne wzory na przemieszczenie pionowe  $w(r, 0)$  oraz  $w(0, z)$ , które w układzie współrzędnych bezwymiarowych (3.46)<sub>1,2</sub> przedstawimy poniżej.

Przemieszczenie płaszczyzny  $\zeta=0$  wynosi

$$w(\rho, 0) = \frac{4apF(\alpha - \beta^2 v_1^2)}{E\pi(s_2 - s_1)s_1 s_2 \alpha^3 \gamma (1 - v_1)} \hat{w}(\rho, 0), \quad (3.83)$$

gdzie:

$$\hat{w}(\rho, 0) = \begin{cases} \hat{E}(\rho^2), & 0 \leq \rho \leq 1, \\ \rho \hat{E}\left(\frac{1}{\rho^2}\right) + \frac{(1 - \rho^2)}{\rho} \hat{K}\left(\frac{1}{\rho^2}\right), & \rho \geq 1, \end{cases} \quad (3.84)$$

$$s_1 = \sqrt{\frac{\alpha - \beta\gamma v_1 - F}{\alpha\gamma(1 - v_1)}}, \quad s_2 = \sqrt{\frac{\alpha - \beta\gamma v_1 + F}{\alpha\gamma(1 - v_1)}},$$

$$F = \frac{2\beta^2 \gamma^2 v_1^2 + \alpha^2 (1 + v_1) - \alpha\gamma [\gamma(1 - v_1) + 2\beta v_1 (1 + v_1)]}{(1 + v_1)},$$

<sup>49/</sup> Analizę rozwiązania równania (3.79) podano w monografii [61], s. 36-40. Warto też wspomnieć, że szczegółową analizę tego typu równania podano również w monografii [24], s. 128-130.

$$\alpha = \frac{E_3}{E_1}, \quad \beta = \frac{\nu_3}{\nu_1}, \quad \gamma = \frac{G_3}{G_1},$$

$E_1, E_3, \nu_1, \nu_3, G_1, G_3$  – odpowiednio moduły Younga, współczynniki Poissona oraz moduły Kirchhoffa<sup>50/</sup>,

a funkcje eliptyczne, występujące w (3.84)<sub>1</sub>, są zdefiniowane wzorem (3.49).

Zmiennosc maksymalnych przemieszczeń po głębokości  $\zeta$  zapiszemy następująco

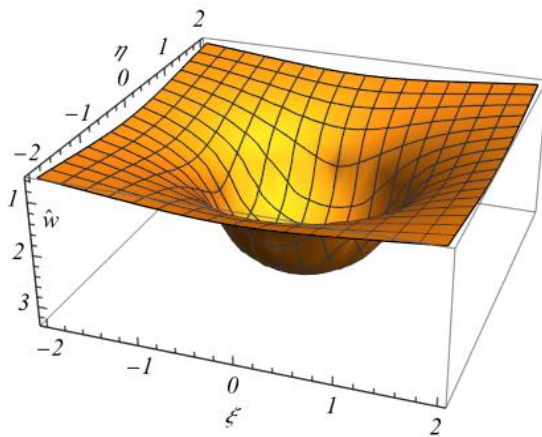
$$\hat{w}(0, \zeta) = \frac{\alpha(\alpha - \beta^2 \nu_1^2) \left[ \zeta(s_2 - s_1) + \sqrt{1 + s_1^2 \zeta^2} - \sqrt{1 + s_2^2 \zeta^2} \right]}{s_1(s_2 - s_1)s_2 \alpha^3 \gamma (1 - \nu_1)} + \frac{(\alpha - \beta^2 \nu_1^2) F \left[ \sqrt{1 + s_1^2 \zeta^2} + \sqrt{1 + s_2^2 \zeta^2} - \zeta(s_1 + s_2) \right]}{s_1(s_2 - s_1)s_2 \alpha^3 \gamma (1 - \nu_1)}. \quad (3.85)$$

Maksymalne przemieszczenie środka  $w(0,0)$  wynosi

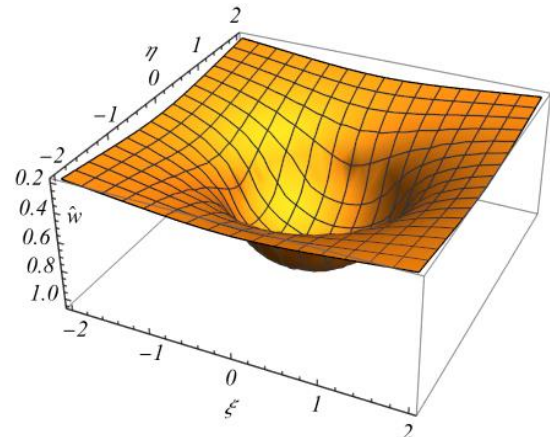
$$\hat{w}(0,0) = \frac{2F(\alpha - \beta^2 \nu_1^2)}{(s_2 - s_1)s_1 s_2 \alpha^3 \gamma (1 - \nu_1)}. \quad (3.86)$$

Należy zaznaczyć, że wzór na wyznaczenie przemieszczeń pionowych  $w(\rho,0)$  otrzymano między innymi, w nieco innej postaci, w monografii [61], s. 139-143.

Na rys.3.107-3.112 przedstawiono wykresy przemieszczeń pionowych  $\hat{w}(\rho,0)$  oraz  $\hat{w}(0, \zeta)$ .

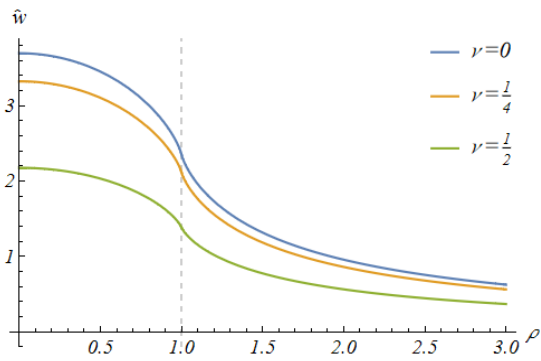


Rys.3.107. Wykres przemieszczeń  $\hat{w}(\xi, \eta, 0)$  dla  $\alpha=1/2, \beta=1, \gamma=1/2, \nu=1/4$ .

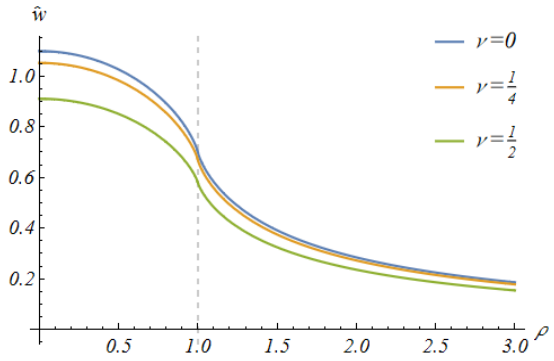


Rys.3.108. Wykres przemieszczeń  $\hat{w}(\xi, \eta, 0)$  dla  $\alpha=2, \beta=1, \gamma=2, \nu=1/4$ .

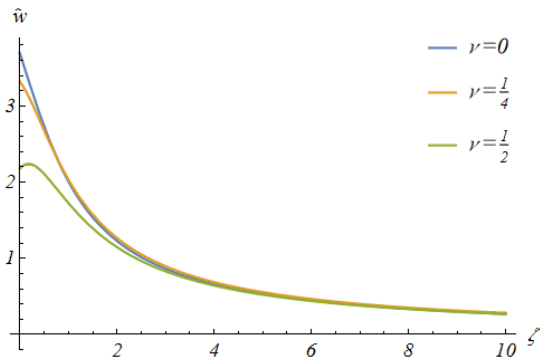
<sup>50/</sup> Patrz Załącznik 2, pkt.7.



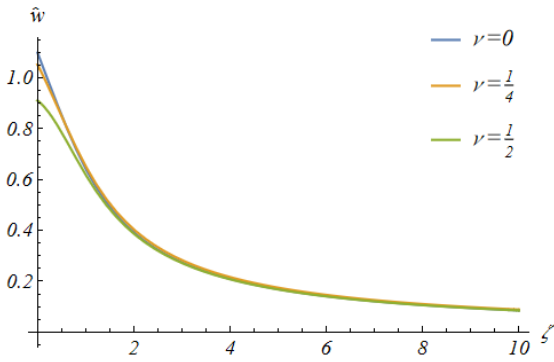
Rys.3.109. Wykres  $\hat{w}(\rho, 0)$  dla  $\alpha=1/2, \beta=1, \gamma=1/2$ .



Rys.3.110. Wykres  $\hat{w}(\rho, 0)$  dla  $\alpha=2, \beta=1, \gamma=2$ .



Rys.3.111. Wykres  $\hat{w}(0, \zeta)$  dla  $\alpha=1/2, \beta=1, \gamma=1/2$ .



Rys.3.112. Wykres  $\hat{w}(0, \zeta)$  dla  $\alpha=2, \beta=1, \gamma=2$ .

W przypadku, kiedy współczynniki  $\alpha, \beta, \gamma$  są równe 1, otrzymujemy rozwiązanie izotropowej półprzestrzeni sprężystej.

## 4. ROZWIĄZANIA PRZYBLIŻONE WYBRANYCH PRZYPADKÓW OBCIĄŻENIA WARSTWY SPRĘŻYSTEJ

### 4.1 Cel rozdziału

Celem tego rozdziału jest przedstawienie przybliżonych wzorów na wyznaczenie maksymalnych przemieszczeń pionowych wybranych zagadnień obciążenia warstwy sprężystej: warstwy obciążonej na powierzchni w kształcie koła o promieniu  $a$  oraz prostokąta o wymiarach  $2a \times 2b$ . Punktem wyjścia są rozwiązania ściśle liniowej teorii sprężystości dla półprzestrzeni sprężystej, opisane w podrozdziale 3.3.1.

### 4.2 Warstwa obciążona równomiernie na powierzchni koła

W przypadku półprzestrzeni sprężystej, obciążonej na powierzchni w kształcie koła o promieniu  $a$ <sup>51/</sup>, funkcję  $w_{ts}(0, \zeta)$ , charakteryzującą rozkład maksymalnych przemieszczeń pionowych po głębokości przedstawiono w postaci

$$w_{ts}(0, \zeta) = \frac{ap}{E} \hat{w}_{ts}(0, \zeta), \quad (4.1)$$

w której

$$\hat{w}_{ts}(0, \zeta) = \frac{(1+\nu) \left[ 2(1-\nu) - (1-2\nu)\zeta \left( \sqrt{1+\zeta^2} - \zeta \right) \right]}{\sqrt{1+\zeta^2}}. \quad (4.2)$$

Widoczne jest, że funkcja (4.1) zależy od charakterystycznego wymiaru przyłożonego obciążenia  $a$ , wartości obciążenia  $p$ , a także stałych materiałowych  $E$  i  $\nu$ .

Zmodyfikujmy wzór (4.1) w taki sposób, żeby dla dowolnej głębokości  $\zeta = \lambda$ , przemieszczenie pionowe było równe zeru. W ten sposób otrzymamy przybliżoną funkcję przemieszczeń pionowych warstwy, którą zapiszemy w następującej postaci

$$w_{p0}(0, \zeta, \lambda) = \frac{ap}{E} \hat{w}_{p0}(0, \zeta, \lambda), \quad (4.3)$$

gdzie

---

<sup>51/</sup> Patrz podpunkt 3.3.1, wzór (3.51). Wzór (4.1) został wyprowadzony dla  $\rho=0$ . Zmienność funkcji  $\hat{w}_{ts}(1, \zeta)$  jest podobna do  $\hat{w}_{ts}(0, \zeta)$ .

$$\hat{w}_{p0}(0, \zeta, \lambda) = (1 + \nu) \frac{2(1 - \nu) - \zeta(1 - 2\nu)(\sqrt{1 + \zeta^2} - \zeta)}{\sqrt{1 + \zeta^2}} - (1 + \nu) \frac{2(1 - \nu) - \lambda(1 - 2\nu)(\sqrt{1 + \lambda^2} - \lambda)}{\sqrt{1 + \lambda^2}}, \quad (4.4)$$

przy czym  $0 \leq \zeta \leq \lambda$ .

Wzór (4.4) określa w sposób przybliżony maksymalne przemieszczenia pionowe dla warstwy o dowolnej miąższości  $\lambda$  w zależności od zmiennej  $\zeta$ .

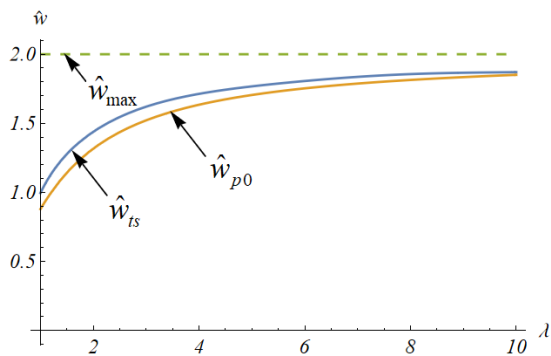
Na rys.4.1-4.3 przedstawiono wykresy maksymalnych przemieszczeń pionowych warstwy  $\hat{w}(0,0,\lambda)$ , sporządzone dla różnych wartości współczynnika Poissona. Na poniższych rysunkach wprowadzono następujące oznaczenia<sup>52/</sup>:

$\hat{w}_{\max}$  – maksymalne przemieszczenie półprzestrzeni według rozwiązania ścisłego TS,

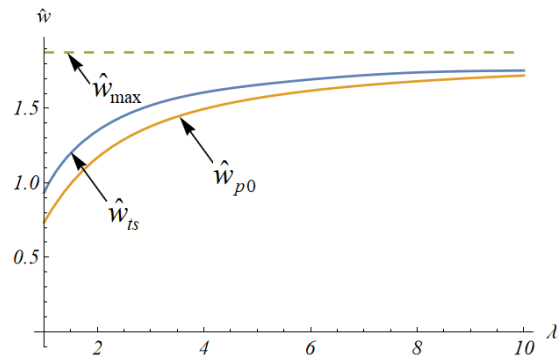
$\hat{w}_{ts}$  – maksymalne przemieszczenie warstwy z poślizgiem według TS,

$\hat{w}_{p0}$  – przemieszczenie warstwy według wzoru przybliżonego (4.4),

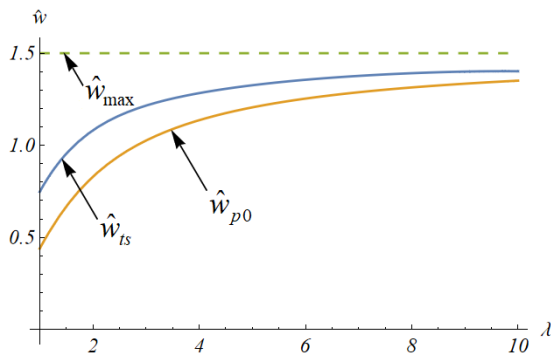
$\hat{w}_p$  – przemieszczenie warstwy według wzoru przybliżonego (4.7).



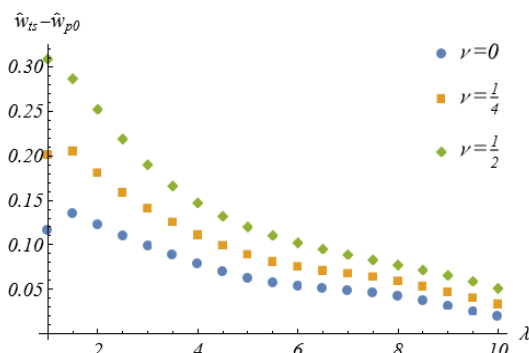
Rys.4.1. Wykres  $\hat{w}(0,0,\lambda)$  dla  $\nu=0$ .



Rys.4.2. Wykres  $\hat{w}(0,0,\lambda)$  dla  $\nu=1/4$ .



Rys.4.3. Wykres  $\hat{w}(0,0,\lambda)$  dla  $\nu=1/2$ .



Rys.4.4. Wykres  $\hat{w}_{ts}(0,0,\lambda) - \hat{w}_{p0}(0,0,\lambda)$ .

<sup>52/</sup> Oznaczenia dotyczą rys.4.1-4.34.



Z rys.4.1-4.3 wynika, że wraz ze wzrostem miąższości warstwy  $\lambda$ , maksymalne przemieszczenie według wzoru przybliżonego (4.4) zbliża się do wyniku ścisłego teorii sprężystości. W przypadku przejścia do półprzestrzeni ( $\lambda \rightarrow \infty$ ) przemieszczenia (4.4) dążą do takiej samej wartości jak i w przypadku rozwiązania ścisłego dla półprzestrzeni sprężystej (4.2). Dla wartości  $\lambda < 10$  oraz ze wzrostem  $\nu$  ( $0 \leq \nu \leq 1/2$ ) wzrasta różnica pomiędzy wynikiem ścisłym a przybliżonym, którą pokazano na rys.4.4 dla trzech wartości współczynnika Poissona:  $\nu=0$ ,  $\nu=1/4$ ,  $\nu=1/2$ . Tę różnicę można zmniejszyć, wprowadzając następującą funkcję błędu  $\hat{R}(\lambda)$

$$\hat{R}(\lambda) = \hat{w}_{\nu} (0, 0, \lambda) - \hat{w}_{p0} (0, 0, \lambda). \quad (4.5)$$

Funkcję błędu (4.5), wyznaczoną dla  $\nu=0$ , można aproksymować, na przykład, wielomianem o postaci (ze wzrostem wartości  $\lambda$  funkcja błędu maleje)

$$\hat{R}(\lambda) = t_1 + \frac{t_2}{\lambda} + \frac{t_3}{\lambda^2} + \frac{\nu(t_4 + t_5\nu)}{\lambda}, \quad (4.6)$$

gdzie  $t_i$  – współczynniki wielomianu aproksymującego ( $i=1,2,3,4,5$ ).

Zauważmy jednak, że w przypadku granicznym przy  $\lambda \rightarrow \infty$ , funkcja błędu przyjmuje wartość  $t_1$ . Dodatek  $\nu(t_4 + t_5\nu)$  w (4.6) potrzebny jest, aby uwzględnić zmienność funkcji błędu od  $\nu$  (wyznaczoną dla  $\lambda=1$ ).

Ostatecznie, przybliżony wzór na przemieszczenia pionowe dla dowolnego  $\lambda$  zapiszemy następująco

$$w_p (0, \zeta, \lambda) = \frac{ap}{E} \hat{w}_p (0, \zeta, \lambda), \quad (4.7)$$

gdzie:

$$\hat{w}_p (0, \zeta, \lambda) = \hat{w}_{p0} (0, \zeta, \lambda) + \left(1 - \frac{\zeta}{\lambda}\right) \hat{R}(\lambda), \quad (4.8)$$

$$\hat{R}(\lambda) = \frac{\lambda [0,413 - 0,009\lambda + (0,2906 + 0,186\nu)\nu] - 0,289}{\lambda^2}.$$

W przypadku granicznym funkcja błędu wynosi:  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \hat{R}(\lambda) = -0,09$ .

Wzór (4.7), bazujący na ścisłym rozwiązaniu dla półprzestrzeni, umożliwia wyznaczenie, z dużą dokładnością, maksymalnego przemieszczenia dla dowolnego  $\lambda$  oraz  $\zeta \leq \lambda$ .

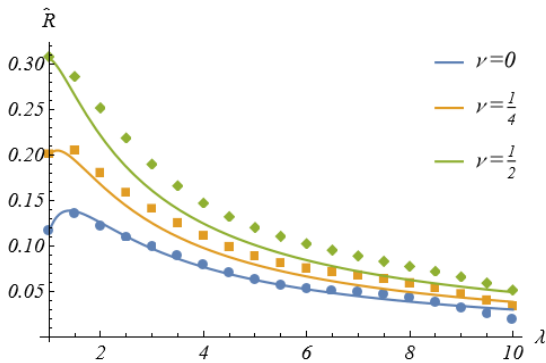
We wzorze (4.7) dodatkowo wprowadzono mnożnik  $1 - \zeta/\lambda$ , pozwalający uwzględnić zmniejszenie wartości poprawki  $\hat{R}(\lambda)$  wraz ze wzrostem głębokości  $\zeta$ .

**Wzorów (4.3) i (4.7) autor nie spotkał w literaturze przedmiotu.**

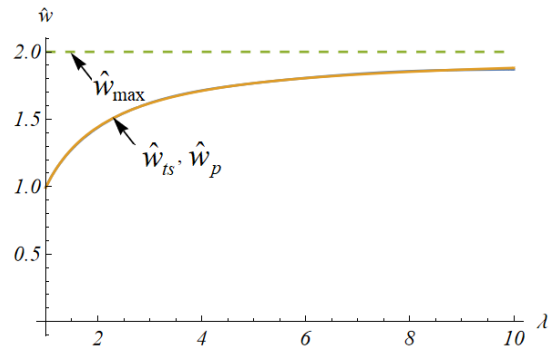
Na rys.4.5 przedstawiono wykres funkcji błędu  $\hat{R}(\lambda)$ , sporządzony dla trzech wartości współczynnika Poissona:  $\nu=0$ ,  $\nu=1/4$ ,  $\nu=1/2$ .

Jak wynika z rys.4.5, przyjęta w taki sposób funkcja błędu dobrze przybliża różnicę pomiędzy wynikiem ścisłym a wzorem przybliżonym (4.4) dla warstwy o dowolnej miąższości  $\lambda$ , w szczególności dla współczynnika Poissona  $\nu=0$  i  $\nu=1/4$ . Natomiast w przypadku  $\nu=1/2$  otrzymujemy nieco zaniżone wartości funkcji błędu.

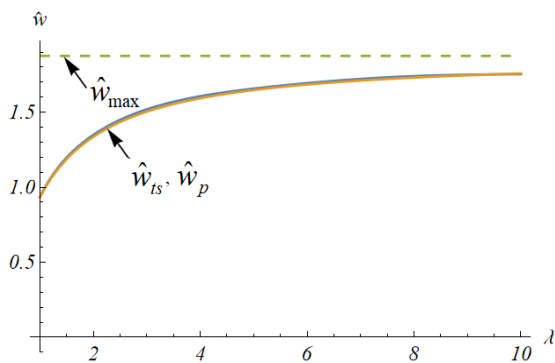
Na rys.4.6-4.8 przedstawiono wykresy zależności maksymalnych przemieszczeń pionowych  $\hat{w}_p(0,0,\lambda)$  oraz  $\hat{w}_{ts}(0,0,\lambda)$  od  $\lambda$ , otrzymane odpowiednio według zmodyfikowanego wzoru (4.7) i według teorii sprężystości dla warstwy z poślizgiem na nieodkształcalnej bazie (patrz podrozdział 3.3.2).



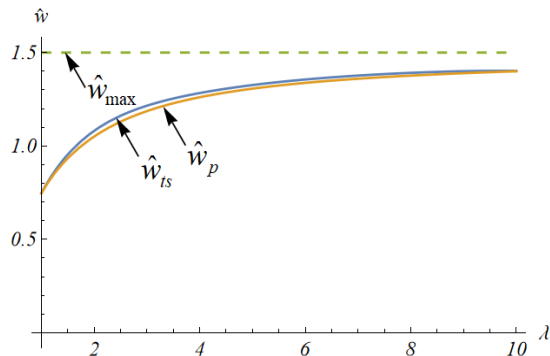
Rys.4.5. Wykres funkcji błędu  $\hat{R}(\lambda)$ .



Rys.4.6. Wykres  $\hat{w}_p(0,0,\lambda)$  i  $\hat{w}_{ts}(0,0,\lambda)$ ,  $\nu=0$ .



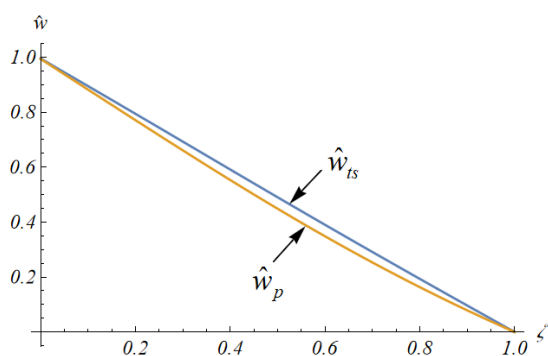
Rys.4.7. Wykres  $\hat{w}_p(0,0,\lambda)$  i  $\hat{w}_{ts}(0,0,\lambda)$ ,  $\nu=1/4$ .



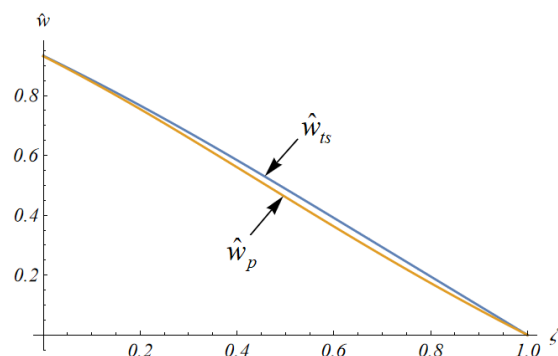
Rys.4.8  $\hat{w}_p(0,0,\lambda)$  i  $\hat{w}_{ts}(0,0,\lambda)$ ,  $\nu=1/2$ .

Jak wynika z rys.4.6-4.8, przy przyjętej poprawce  $\hat{R}(\lambda)$  wartości maksymalnego przemieszczenia pionowego, obliczone według wzoru (4.7), są bardzo zbliżone do wartości ścisłych.

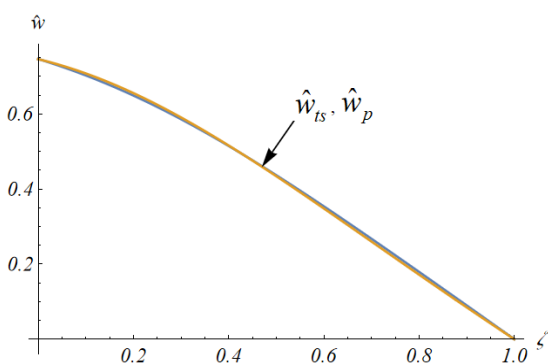
Na rys.4.9-4.14 przedstawiono wykresy zanikania maksymalnych przemieszczeń pionowych  $\hat{w}(0, \zeta)$ , otrzymane według teorii sprężystości oraz według wzoru przybliżonego (4.7).



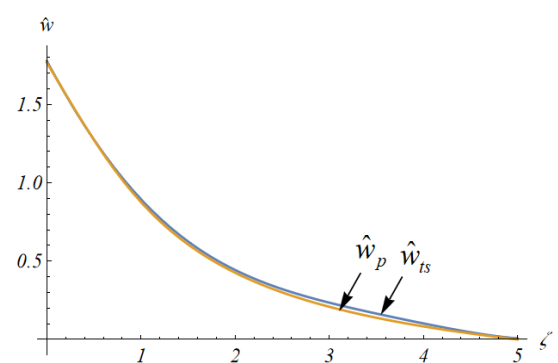
Rys.4.9. Wykres  $\hat{w}(0, \zeta)$  dla  $\lambda=1, \nu=0$ .



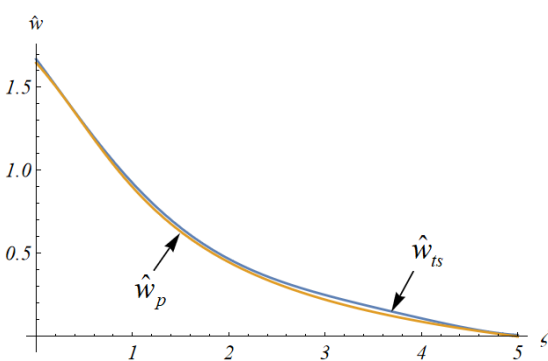
Rys.4.10. Wykres  $\hat{w}(0, \zeta)$  dla  $\lambda=1, \nu=1/4$ .



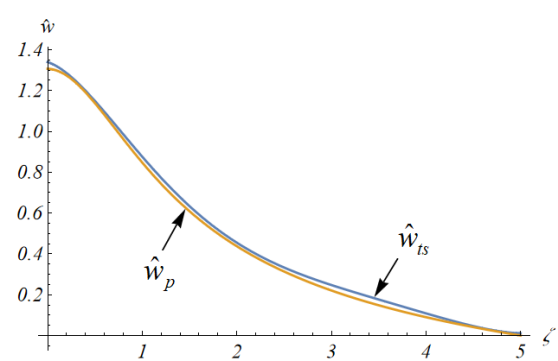
Rys.4.11. Wykres  $\hat{w}(0, \zeta)$  dla  $\lambda=1, \nu=1/2$ .



Rys.4.12. Wykres  $\hat{w}(0, \zeta)$  dla  $\lambda=5, \nu=0$ .



Rys.4.13. Wykres  $\hat{w}(0, \zeta)$  dla  $\lambda=5, \nu=1/4$ .



Rys.4.14. Wykres  $\hat{w}(0, \zeta)$  dla  $\lambda=5, \nu=1/2$ .

W tab.4.1 zostały przedstawione, przeskalowane przez mnożnik  $E/ap$ , wartości maksymalnych przemieszczeń pionowych  $\hat{w}_{ts}(0, 0)$ ,  $\hat{w}_p(0, 0)$ , otrzymane odpowiednio według teorii sprężystości dla warstwy z poślizgiem na nieodkształcalnym podłożu i ze wzoru przybliżonego (4.7).

Tab.4.1. Porównanie wartości maksymalnych przemieszczeń warstwy z poślizgiem.

$\lambda$	$\nu=0$			$\nu=1/4$			$\nu=1/2$		
	$\hat{w}_{ts}$	$\hat{w}_p$	Błąd, %	$\hat{w}_{ts}$	$\hat{w}_p$	Błąd, %	$\hat{w}_{ts}$	$\hat{w}_p$	Błąd, %
1	0,995	0,994	0,2	0,933	0,931	0,2	0,747	0,746	0,1
2	1,441	1,442	0,1	1,350	1,343	1,1	1,080	1,05	2,8
5	1,766	1,767	0,05	1,656	1,647	0,5	1,324	1,306	1,4
10	1,874	1,880	0,3	1,757	1,757	0,0	1,406	1,399	0,45

W przypadku warstwy sztywno połączonej z nieodkształcalnym podłożem, przybliżony wzór na przemieszczenie pionowe  $w(0, \zeta, \lambda)$  zapiszemy w następującej postaci

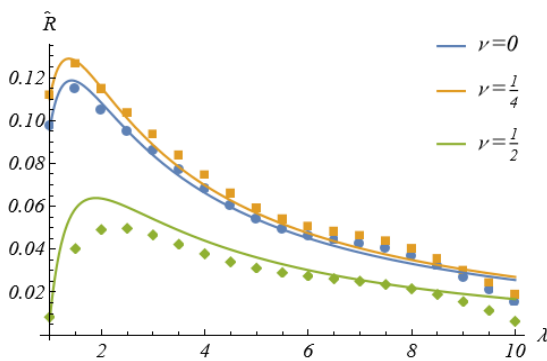
$$w_p(0, \zeta, \lambda) = \frac{ap}{E} \hat{w}_p(0, \zeta, \lambda), \quad (4.9)$$

gdzie:

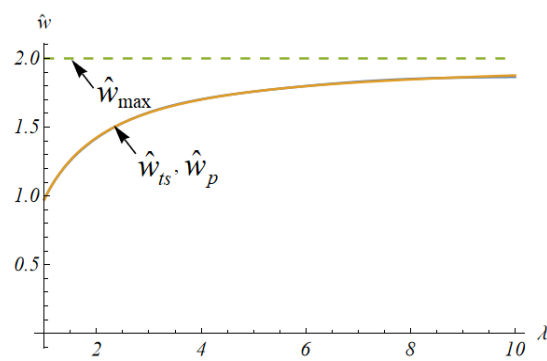
$$\hat{w}_p(0, \zeta, \lambda) = \hat{w}_{p0}(0, \zeta, \lambda) + \left(1 - \frac{\zeta}{\lambda}\right) \hat{R}(\lambda), \quad (4.10)$$

$$\hat{R}(\lambda) = \frac{\lambda [0,361 - 0,008\lambda + (0,292 - 0,94\nu)\nu] - 0,257}{\lambda^2}.$$

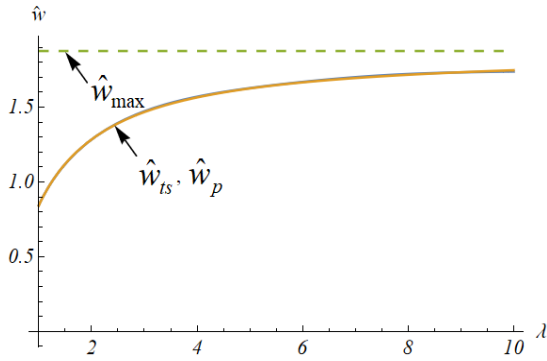
Na rys.4.16-4.18 przedstawiono wykresy zależności maksymalnych przemieszczeń pionowych  $\hat{w}_{ts}(0, 0, \lambda)$  i  $\hat{w}_p(0, 0, \lambda)$  od  $\lambda$ , otrzymane odpowiednio według zmodyfikowanego wzoru (4.9) oraz według teorii sprężystości dla warstwy sztywno połączonej z nieodkształcalną bazą (patrz podrozdział 3.3.2). Natomiast na rys.4.19-4.24 przedstawiono wykresy  $\hat{w}_{ts}(0, \zeta)$  oraz  $\hat{w}_p(0, \zeta)$  dla różnych wartości  $\lambda$ .



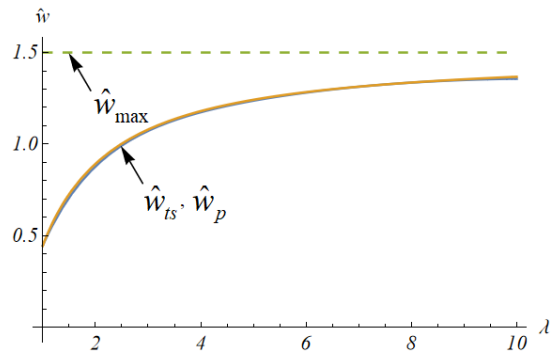
Rys.4.15. Wykres funkcji błędu  $\hat{R}(\lambda)$ .



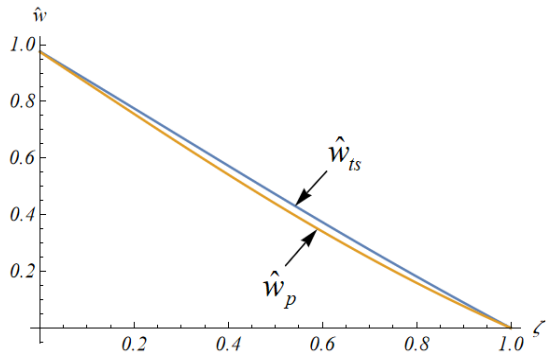
Rys.4.16. Wykres  $\hat{w}(0, 0, \lambda)$  dla  $\nu=0$ .



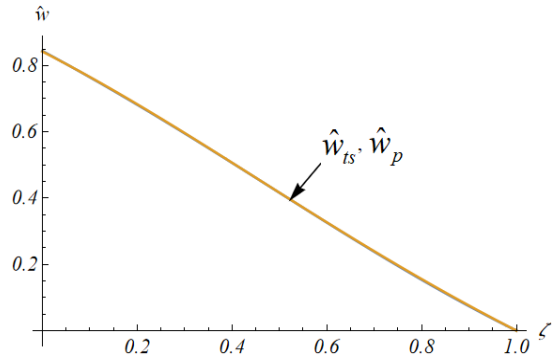
Rys.4.17. Wykres  $\hat{w}(0,0,\lambda)$  dla  $\nu=1/4$ .



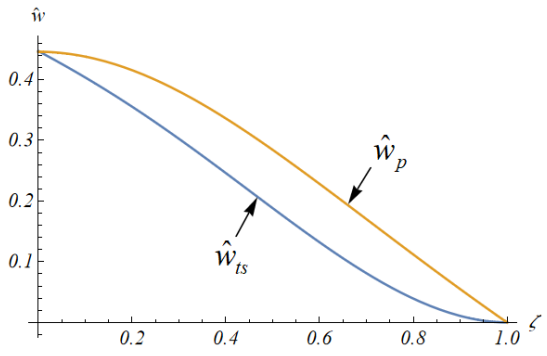
Rys.4.18. Wykres  $\hat{w}(0,0,\lambda)$  dla  $\nu=1/2$ .



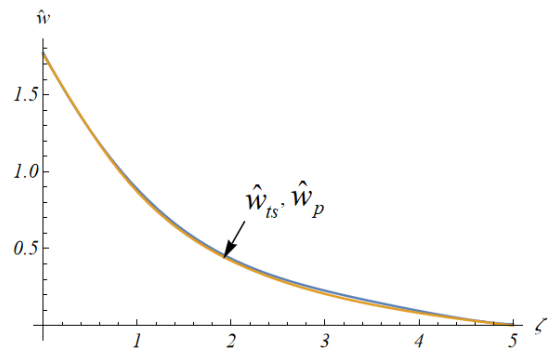
Rys.4.19. Wykres  $\hat{w}(0,\zeta)$  dla  $\lambda=1, \nu=0$ .



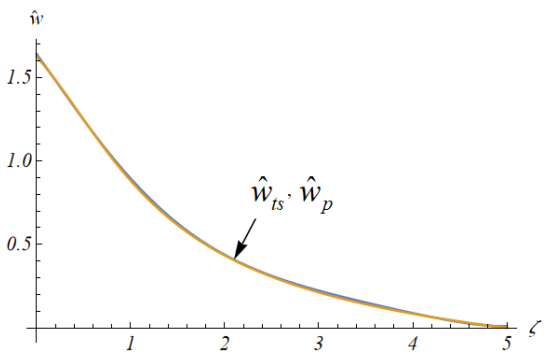
Rys.4.20. Wykres  $\hat{w}(0,\zeta)$  dla  $\lambda=1, \nu=1/4$ .



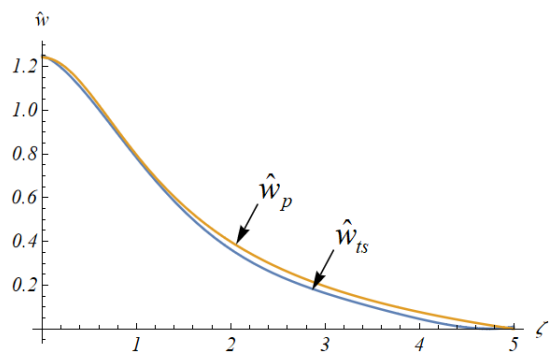
Rys.4.21. Wykres  $\hat{w}(0,\zeta)$  dla  $\lambda=1, \nu=1/2$ .



Rys.4.22. Wykres  $\hat{w}(0,\zeta)$  dla  $\lambda=5, \nu=0$ .



Rys.4.23. Wykres  $\hat{w}(0,\zeta)$  dla  $\lambda=5, \nu=1/4$ .



Rys.4.24. Wykres  $\hat{w}(0,\zeta)$  dla  $\lambda=5, \nu=1/2$ .

Jak wynika z rys.4.16-4.24, maksymalne przemieszczenia, obliczone według wzoru przybliżonego (4.9) są bardzo zbliżone do wyników ścisłych teorii sprężystości dla  $\nu=0$  i  $\nu=1/4$ , natomiast dla  $\nu=1/2$ , w przypadku małej miąższości warstwy, wzór przybliżony ma nieco inny charakter w porównaniu z wynikiem ścisłym (rys.4.21). Po zwiększeniu  $\lambda$  wzór przybliżony dla  $\nu=1/2$  jest zbliżony do wartości ścisłych (rys.4.24).

W tab.4.2 zostały przedstawione wartości maksymalnych przemieszczeń  $\hat{w}_{ts}(0,0)$ ,  $\hat{w}_p(0,0)$ , otrzymane odpowiednio według teorii sprężystości dla warstwy sztywno połączonej z nieodkształcalną bazą oraz według wzoru przybliżonego (4.9).

Tab.4.2. Porównanie wartości maksymalnych przemieszczeń warstwy sztywno połączonej.

$\lambda$	$\nu=0$			$\nu=1/4$			$\nu=1/2$		
	$\hat{w}_{ts}$	$\hat{w}_p$	Błąd, %	$\hat{w}_{ts}$	$\hat{w}_p$	Błąd, %	$\hat{w}_{ts}$	$\hat{w}_p$	Błąd, %
1	0,976	0,974	0,2	0,844	0,842	0,2	0,447	0,445	0,3
2	1,423	1,424	0,1	1,285	1,283	0,1	0,878	0,892	1,6
5	1,758	1,758	0,0	1,626	1,624	0,1	1,236	1,242	0,5
10	1,87	1,87	0,3	1,742	1,746	0,2	1,361	1,367	0,5

W przypadku warstwy poprzecznie izotropowej, obciążonej na powierzchni w kształcie koła o promieniu  $a$ , przybliżony wzór na wyznaczenie maksymalnych przemieszczeń pionowych  $w(0,\zeta,\lambda)$  zapiszemy w następującej postaci

$$w_p(0,\zeta,\lambda) = \frac{ap}{E_1} \hat{w}_p(0,\zeta,\lambda), \quad (4.11)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \hat{w}_p(0,\zeta,\lambda) = & \frac{\alpha(\alpha - \beta^2\nu_1^2)\left((s_2 - s_1)\zeta + \sqrt{1 + s_1^2\zeta^2} - \sqrt{1 + s_2^2\zeta^2}\right)}{s_1s_2(s_2 - s_1)\alpha^3\gamma(1 - \nu_1)} + \\ & \frac{F(\alpha - \beta^2\nu_1^2)\left(\sqrt{1 + s_1^2\zeta^2} + \sqrt{1 + s_2^2\zeta^2} - (s_1 + s_2)\zeta\right)}{s_1s_2(s_2 - s_1)\alpha^3\gamma(1 - \nu_1)} - \\ & \frac{\alpha(\alpha - \beta^2\nu_1^2)\left((s_2 - s_1)\lambda + \sqrt{1 + s_1^2\lambda^2} - \sqrt{1 + s_2^2\lambda^2}\right)}{s_1s_2(s_2 - s_1)\alpha^3\gamma(1 - \nu_1)} - \\ & \frac{F(\alpha - \beta^2\nu_1^2)\left(\sqrt{1 + s_1^2\lambda^2} + \sqrt{1 + s_2^2\lambda^2} - (s_1 + s_2)\lambda\right)}{s_1s_2(s_2 - s_1)\alpha^3\gamma(1 - \nu_1)}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

gdzie:  $s_1, s_2, F$  podano odpowiednio wzorami (3.57)<sub>2,3,4</sub>.

Podsumowując, wzory (4.7), (4.9) oraz (4.11) mogą być wykorzystywane do obliczeń inżynierskich w celu wyznaczenia przybliżonej wartości maksymalnego

przemieszczenia pionowego  $w(0, \zeta, \lambda)$  dla warstwy o warunkach brzegowych odpowiadających warstwie z półizgiem oraz sztywno połączonej z nieodkształcalną bazą, a także warstwy poprzecznie izotropowej, obciążonych na powierzchni w kształcie koła o promieniu  $a$ , zwłaszcza gdy współczynnik Poissona jest zbliżony do  $\frac{1}{4}$  (często występuje w praktyce). Dla  $\nu = \frac{1}{2}$  (rys.4.21) wzór przybliżony (4.9) nieco różni się (po głębokości warstwy) od wyniku ścisłego teorii sprężystości dla małych  $\lambda$ .

### 4.3 Warstwa obciążona równomiernie na powierzchni prostokąta

W przypadku warstwy sprężystej, obciążonej na powierzchni w kształcie prostokąta, bazując na rozwiązaniu dla półprzestrzeni sprężystej (patrz podpunkt 3.2.3), można uzyskać wzór przybliżony na przemieszczenia pionowe, tym razem dla dowolnych współrzędnych przestrzennych oraz dla dowolnego ilorazu boków przyłożonego obciążenia  $\kappa = b/a$ . Poniżej rozpatrzono tylko przypadki szczególne (wyznaczenie przybliżonego wzoru na maksymalne przemieszczenia  $w(0, 0, \zeta)$  warstwy obciążonej w kształcie kwadratu).

W przypadku półprzestrzeni sprężystej, obciążonej na powierzchni w kształcie kwadratu o bokach  $2a$  ( $\kappa = 1$ ), przemieszczenia pionowe  $w(0, 0, \zeta)$  zapiszemy w postaci (patrz podrozdział 3.2.2)

$$w_{ts}(0, 0, \zeta) = -\frac{ap}{E} \hat{w}_{ts}(0, 0, \zeta), \quad (4.13)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \hat{w}_{ts}(0, 0, \zeta) = & -\frac{2}{\pi} \zeta (1+\nu)(1-2\nu) \operatorname{arccot}\left(\zeta \sqrt{2+\zeta^2}\right) - \\ & \frac{4}{\pi} (1-\nu^2) \ln \left( \frac{\sqrt{2+\zeta^2}-1}{\sqrt{2+\zeta^2}+1} \right). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Modyfikując formułę (4.14) w sposób analogiczny jak w podpunkcie 4.2, otrzymamy następujący wzór przybliżony na maksymalne przemieszczenie pionowe dla warstwy o dowolnej miąższości  $\lambda$ , obciążonej na powierzchni w kształcie kwadratu

$$w_{p0}(0, 0, \zeta, \lambda) = \frac{ap}{E} \hat{w}_{p0}(0, 0, \zeta, \lambda), \quad (4.15)$$

gdzie

$$\hat{w}_{p0}(0,0,\zeta,\lambda) = \frac{2(1+\nu)(1-2\nu)}{\pi} \left[ \lambda \operatorname{arccot}(\lambda\sqrt{2+\lambda^2}) - \zeta \operatorname{arccot}(\zeta\sqrt{2+\zeta^2}) \right] - \frac{4(1-\nu^2)}{\pi} \left[ \ln\left(\frac{\sqrt{2+\zeta^2}-1}{\sqrt{2+\zeta^2}+1}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{2+\lambda^2}+1}{\sqrt{2+\lambda^2}-1}\right) \right]. \quad (4.16)$$

Aproksymując funkcję błędu  $R(\lambda)$  wielomianem o postaci (rys.4.25)

$$\hat{R}(\lambda) = t_1 + \frac{t_2}{\lambda} + \frac{t_3}{\lambda^2} + \frac{\nu(t_4 + t_5\nu)}{\sqrt{\lambda}}, \quad (4.17)$$

gdzie  $t_i$  – współczynniki wielomianu aproksymującego,

ostatecznie, przybliżony wzór na wyznaczenie maksymalnych przemieszczeń pionowych zapiszemy następująco

$$w_p(0,0,\zeta,\lambda) = \frac{ap}{E} \hat{w}_p(0,0,\zeta,\lambda), \quad (4.18)$$

gdzie:

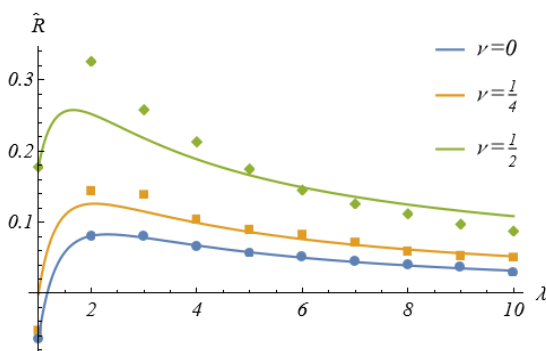
$$\hat{w}_p(0,0,\zeta,\lambda) = \hat{w}_{p0}(0,0,\zeta,\lambda) + \left(1 - \frac{\zeta}{\lambda}\right) \hat{R}(\lambda), \quad (4.19)$$

$$\hat{R}(\lambda) = \frac{\lambda \left[ 0,382 - 0,001\lambda - \nu\sqrt{\lambda} (0,225 - 1,419\nu) \right] - 0,448}{\lambda^2}.$$

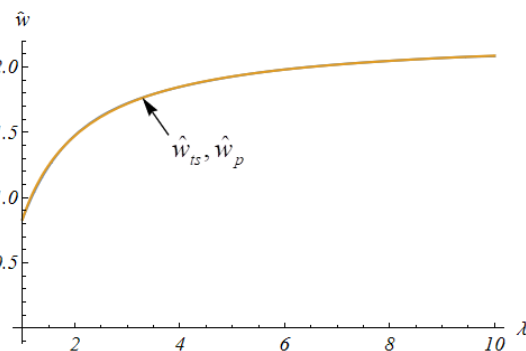
Wzór (4.18), bazujący się na ścisłym rozwiązaniu dla półprzestrzeni, umożliwia wyznaczenie z dużą dokładnością maksymalnego przemieszczenia pionowego warstwy obciążonej w kształcie kwadratu dla dowolnego  $\lambda$  i  $\zeta < \lambda$ .

**Wzorów (4.15) i (4.18) autor nie spotkał w literaturze przedmiotu.**

Na rys.4.26-4.28 przedstawiono wykresy maksymalnych przemieszczeń pionowych  $\hat{w}_{ts}(0,0,\lambda)$  oraz  $\hat{w}_p(0,0,\lambda)$ , otrzymane według zmodyfikowanego wzoru (4.18), a także według teorii sprężystości (patrz 3.2.3). Natomiast na rys.4.29-4.34 przedstawiono wykresy  $\hat{w}_{ts}(0,\zeta)$  oraz  $\hat{w}_p(0,\zeta)$  dla różnych  $\lambda$ .

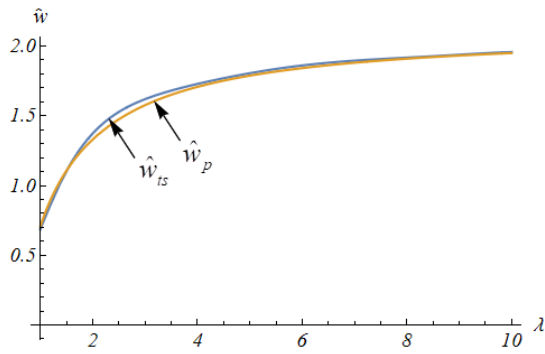


Rys.4.25. Wykres funkcji błędu  $\hat{R}(\lambda)$ .

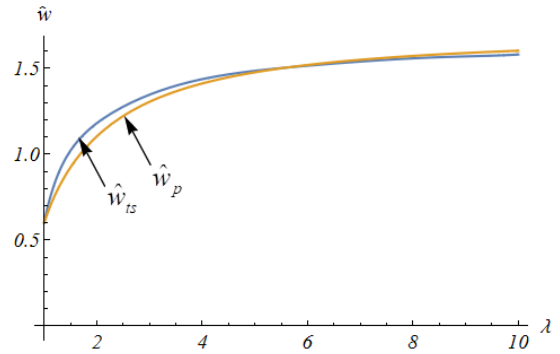


Rys.4.26. Wykres  $\hat{w}(0,0,\lambda)$  dla  $\nu=0$ .

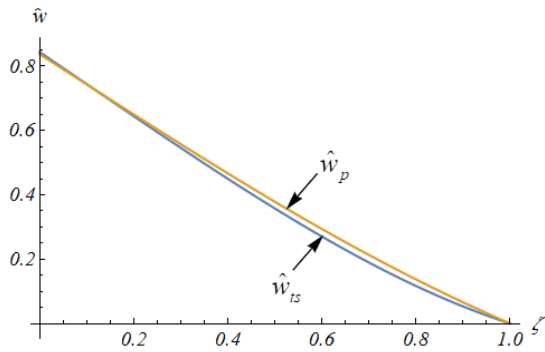




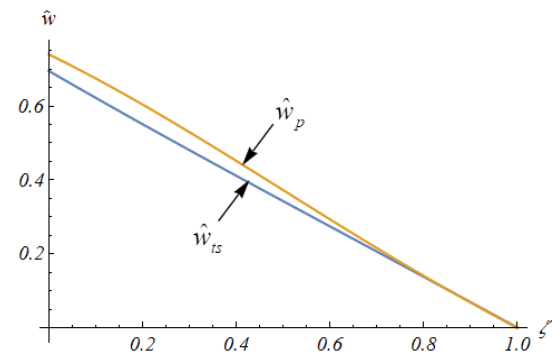
Rys.4.27. Wykres  $\hat{w}(0,0,\lambda)$  dla  $\nu=1/4$ .



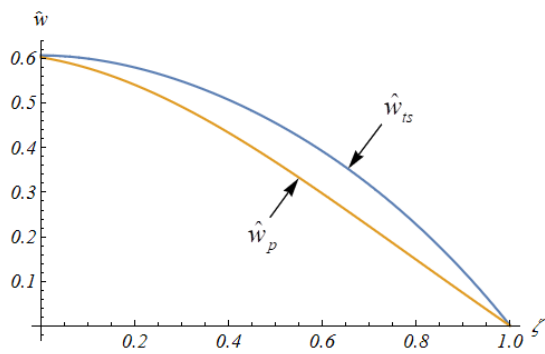
Rys.4.28. Wykres  $\hat{w}(0,0,\lambda)$  dla  $\nu=1/2$ .



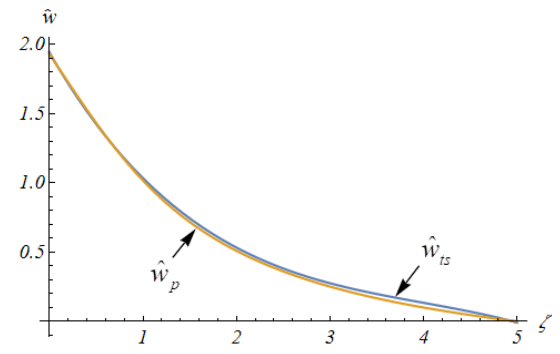
Rys.4.29. Wykres  $\hat{w}(0,\zeta)$  dla  $\nu=0, \lambda=1$ .



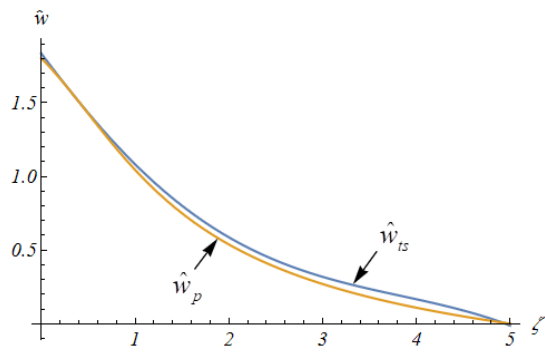
Rys.4.30. Wykres  $\hat{w}(0,\zeta)$  dla  $\nu=1/4, \lambda=1$ .



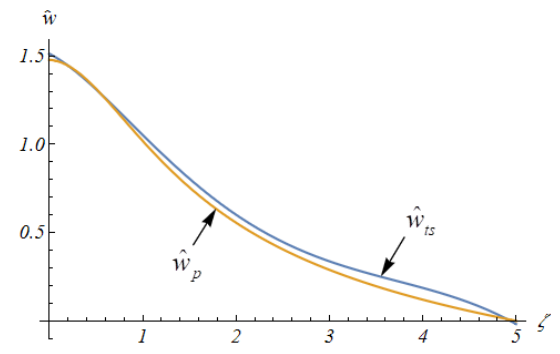
Rys.4.31. Wykres  $\hat{w}(0,\zeta)$  dla  $\nu=1/2, \lambda=1$ .



Rys.4.32. Wykres  $\hat{w}(0,\zeta)$  dla  $\nu=0, \lambda=5$ .



Rys.4.33. Wykres  $\hat{w}(0,\zeta)$  dla  $\nu=1/4, \lambda=5$ .



Rys.4.34. Wykres  $\hat{w}(0,\zeta)$  dla  $\nu=1/2, \lambda=5$ .

W tab.4.3 przedstawiono wartości maksymalnych przemieszczeń pionowych  $\hat{w}_{ts}(0,0)$  oraz  $\hat{w}_p(0,0)$  dla warstwy obciążonej na kwadracie, otrzymane odpowiednio według teorii sprężystości oraz według wzoru przybliżonego (4.18).

Tab.4.3. Porównanie wartości maksymalnych przemieszczeń.

$\lambda$	$\nu=0$			$\nu=1/4$			$\nu=1/2$		
	$\hat{w}_{ts}$	$\hat{w}_p$	Błąd, %	$\hat{w}_{ts}$	$\hat{w}_p$	Błąd, %	$\hat{w}_{ts}$	$\hat{w}_p$	Błąd, %
1	0,836	0,836	0,0	0,688	0,739	7,5	0,603	0,603	0,0
2	1,477	1,447	0,3	1,373	1,355	1,3	1,181	1,107	6,2
5	1,927	1,928	0,05	1,805	1,801	0,2	1,486	1,477	0,6
10	2,083	2,086	0,1	1,956	1,958	0,1	1,581	1,602	1,3

Podsumowując, przybliżony wzór (4.18) może być wykorzystywany do obliczeń inżynierskich w celu wyznaczenia przybliżonej wartości maksymalnego przemieszczenia pionowego warstwy obciążonej w kształcie kwadratu o bokach  $2a$  dla dowolnego  $\lambda$ . Jak wynika z rys.4.31, dla  $\nu=1/2$  oraz małej miąższości warstwy ( $\lambda \leq 1$ ) wzór przybliżony (4.18) daje nieco zaniżone wartości przemieszczenia w środkowej części zakresu  $\zeta$  ( $\zeta \approx 1/2$ ).

#### 4.4 Funkcja zanikania przemieszczeń $\psi(\zeta)$

Vlasov i Leontiev w monografii [29] zaproponowali liniową, hiperboliczną i wykładniczą postać funkcji aproksymującej przemieszczenia pionowe po głębokości warstwy<sup>53/</sup>:

$$\psi_1(z) = 1 - \frac{z}{H}, \quad \psi_2(z) = \frac{\sinh(\gamma(H-z))}{\sinh(\gamma H)}, \quad \psi_3(\zeta) = e^{-\gamma z}, \quad (4.20)$$

gdzie:

$H$  – miąższość warstwy, [m],

$\gamma$  – parametr, charakteryzujący szybkość zanikania przemieszczeń na głębokości podłoża, mający wymiar  $m^{-1}$ .

W monografii [21], s. 256, zaproponowano, na podstawie rozwiązania Boussinesq'a, funkcję zanikania w postaci

$$\psi_4(z) = \sqrt{\frac{b^2 + h^2}{b^2 + (h+z)^2}}, \quad (4.21)$$

<sup>53/</sup> Funkcja (4.20)<sub>3</sub> jest szczególnym przypadkiem funkcji (4.20)<sub>2</sub>, bo  $\lim_{H \rightarrow \infty} \psi_2(z) = e^{-\gamma z}$ .

gdzie:

„ $h$  jest głębokością, na której w konstrukcji nawierzchni jest powierzchnia górna podłoża, a  $b$  dodatkowym parametrem odzwierciedlającym szerokość strefy oddziaływania obciążenia na tej powierzchni” [21], s. 256.

Wzory (4.20)<sub>3</sub> i (4.21) są słuszne dla  $z \in [0, \infty)$ . Wszystkie cztery funkcje są rozwiązaniem równania różniczkowego drugiego rzędu o postaci<sup>54/</sup>

$$\frac{d^2\psi_i}{dz^2} - f_i(z)\psi_i = 0, \quad (4.22)$$

gdzie  $i=1, 2, 3, 4$ , przy czym w przypadku funkcji

$$\psi_1 \rightarrow f_1(z) = 0, \quad \psi_2, \psi_3 \rightarrow f_{2,3}(z) = \gamma^2,$$

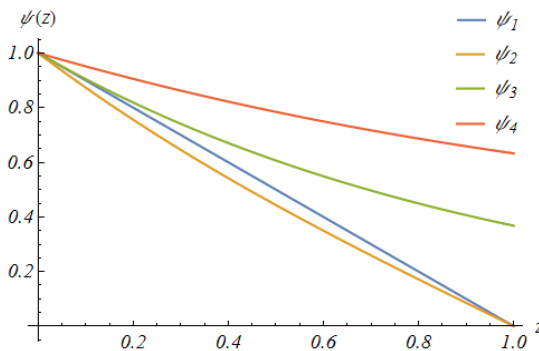
$$\psi_4 \rightarrow f_4(z) = \frac{2(z+h)^2 - b}{[(z+h)^2 + b]^2}. \quad (4.23)$$

Warunki brzegowe zapiszemy w postaci:

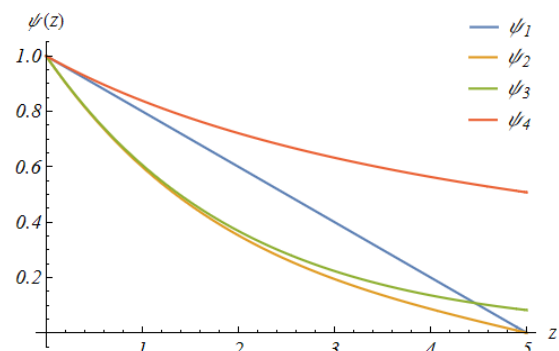
$$\psi_1(0) = \psi_2(0) = \psi_3(0) = \psi_4(0) = 1, \quad (4.24)$$

$$\psi_1(H) = \psi_2(H) = 0, \quad \psi_3(\infty) = \psi_4(\infty) = 0.$$

Widoczne jest, że funkcje zanikania  $\psi_1$  i  $\psi_2$  wykorzystujemy w zagadnieniach warstw i półprzestrzeni ( $H \rightarrow \infty$ ), a funkcje  $\psi_3$  i  $\psi_4$  w zagadnieniach półprzestrzeni.



Rys.4.35. Wykres  $\psi(\zeta)$  dla  $H=1, \gamma=1, b=1$ .



Rys.4.36. Wykres  $\psi(\zeta)$  dla  $H=5, \gamma=1/2, b=1$ .

Jak już wspomniano we wstępie, Vlasov i Leontiev nie podali sposobu wyznaczenia parametru  $\gamma$ . W podanych przez nich przykładach obliczeniowych, znajdujemy tylko wyznaczenie przemieszczeń dla przykładowo założonej wartości tego parametru. Jednak inni badacze zajęli się problematyką wyznaczenia  $\gamma$ . Korzystając z rachunku

<sup>54/</sup> Jeśli wyprowadzić równania Vlasova korzystając z twierdzenia o minimum energii potencjalnej lub z zasady prac wirtualnych, to po wykonaniu wariacji przemieszczeń otrzymujemy dodatkowe równanie różniczkowe typu (4.22).

wariacyjnego, Jones i Xenophontos [48] zaproponowali wyrażenie do obliczania  $\gamma$ . Nie obliczyli jego wartości, ale ustalili zależność między parametrem  $\gamma$  a ugięciem belki lub płyty spoczywającej na kontinuum sprężystym. Idąc za Jonesem i Xenophontosem, Vallabhan i Das [50] dla belki spoczywającej na podłożu sprężystym opracowali iteracyjną metodę wyznaczenia parametru  $\gamma$ . Dla równomiernie rozłożonych obciążeń stwierdzili, że wartość  $\gamma$  zależy między innymi od ilorazu głębokości warstwy do długości belki.

W tym podrozdziale przedstawiono funkcje aproksymujące przemieszczenia po głębokości rozpatrywanej warstwy, otrzymane na podstawie rozwiązania ścisłego teorii sprężystości dla półprzestrzeni sprężystej.

#### 4.4.1 Zmodyfikowane funkcje Vlasova zanikania przemieszczeń

W zaproponowanych przez Vlasova i Leontieva funkcjach zanikania przemieszczeń (4.20) można uniknąć konieczności stosowania parametru  $\gamma$ . W tym celu grubość warstwy  $H$  wyrazimy jako iloczyn charakterystycznego wymiaru obciążenia działającego na warstwę  $z$  bezwymiarowym mnożnikiem  $\lambda$  w postaci:

$$H = a\lambda, \text{ oraz } z = a\zeta. \quad (4.25)$$

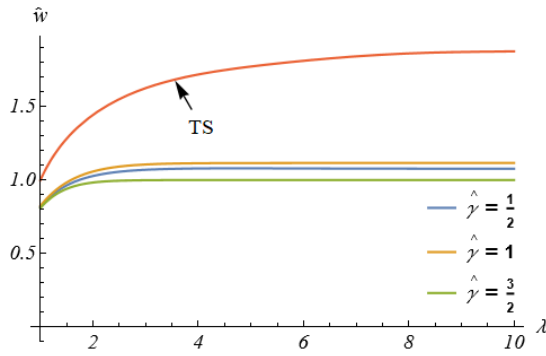
Zmodyfikowane funkcje zanikania (4.20) zapisujemy następująco<sup>55/</sup>:

$$\hat{\psi}_1 = 1 - \frac{\zeta}{\lambda}, \quad \hat{\psi}_2 = \frac{\sinh\left(\lambda\left(1 - \frac{\zeta}{\lambda}\right)\right)}{\sinh(\lambda)}, \quad \hat{\psi}_3 = \left(1 - \frac{\zeta}{\lambda}\right)e^{-\zeta}, \quad (4.26)$$

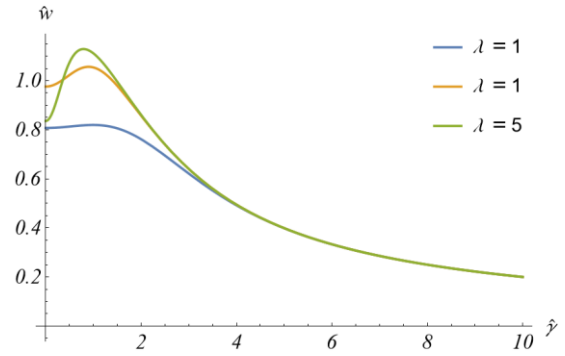
w których  $0 \leq \zeta \leq \lambda$ .

Uzasadnienie modyfikacji funkcji zanikania przemieszczeń przedstawiono na rys.4.37-4.38, na których pokazano zależność maksymalnych przemieszczeń pionowych warstwy obciążonej na powierzchni w kształcie koła o promieniu  $a$ , odpowiednio od miąższości warstwy oraz bezwymiarowego parametru  $\hat{\gamma} = \gamma a$ , dla przyjętej w monografii [29] hiperbolicznej funkcji zanikania (4.20)<sub>2</sub>.

<sup>55/</sup> Porównując wzory (4.20) z (4.26) stwierdzamy ich identyczność dla  $\gamma=1/a$ . Do wzorów (4.26)<sub>2,3</sub> można wprowadzić bezwymiarowy współczynnik zanikania.



Rys.4.37. Wykres  $\hat{w}(\lambda)$  dla  $\nu=0$ .



Rys.4.38. Wykres  $\hat{w}(\hat{\gamma})$  dla  $\nu=0$ .

Z rys.4.37-4.38 wynika, że maksymalne przemieszczenie, niezależnie od miąższości warstwy, wynosi dla  $\hat{\gamma} = \gamma a \approx 1$ .

#### 4.4.2 Zmodyfikowane funkcje zanikania przemieszczeń, bazujące na ścisłych rozwiązaniach teorii sprężystości

W przypadku półprzestrzeni sprężystej obciążonej w kształcie koła, przybliżoną funkcję zależności maksymalnych przemieszczeń pionowych  $w(0, \zeta)$  od głębokości warstwy podano wzorem (4.3). Na podstawie tej zależności można uzyskać funkcję zanikania przemieszczeń, która musi spełniać następujące warunki:

$$\psi(0) = 1, \quad \psi(\lambda) = 0. \quad (4.27)$$

Modyfikując wzór (4.3) z uwzględnieniem warunków (4.27), otrzymamy funkcję zanikania  $\hat{\psi}_4$ , opisującą rozkład przemieszczeń pionowych wzdłuż osi  $\zeta$  dla dowolnego  $\lambda$  w przedziale  $0 \leq \rho \leq 1$ , którą zapiszemy w postaci

$$\hat{\psi}_4(\zeta) = \frac{\frac{2+\zeta^2}{\sqrt{1+\zeta^2}} - \frac{2+\lambda^2}{\sqrt{1+\lambda^2}} + (1-2\nu)(\lambda-\zeta) - 2\nu(\sqrt{1+\zeta^2} - \sqrt{1+\lambda^2})}{2+\lambda - \frac{2+\lambda^2}{\sqrt{1+\lambda^2}} - 2\nu(1+\lambda - \sqrt{1+\lambda^2})}. \quad (4.28)$$

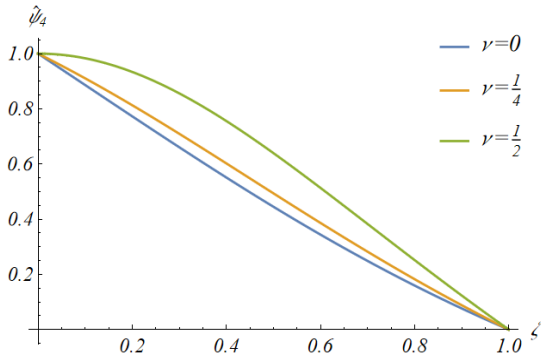
Dla  $\rho > 1$ , funkcję zanikania przemieszczeń można wyprowadzić w analogiczny sposób, bazując na rozwiązaniu ścisłym półprzestrzeni.

W przypadku półprzestrzeni sprężystej, obciążonej na powierzchni w kształcie prostokąta o wymiarach  $2a \times 2b$  (rys.3.2), przemieszczenie pionowe  $w(0,0,\zeta)$  jest dane wzorem (4.15). Modyfikując wzór (4.15), z uwzględnieniem warunków (4.27), otrzymujemy funkcję zanikania  $\hat{\psi}_5$  w postaci

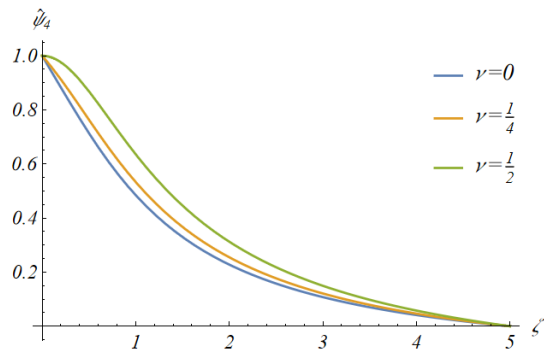
$$\hat{\psi}_5(\zeta) = \frac{(1-2\nu) \left[ \zeta \operatorname{arccot}(\zeta \sqrt{2+\zeta^2}) - \lambda \operatorname{arccot}(\lambda \sqrt{2+\lambda^2}) \right]}{2(1-\nu) \ln \left( \frac{(3-2\sqrt{2})(\sqrt{2+\lambda^2}+1)}{\sqrt{2+\lambda^2}-1} \right) - \lambda(1-2\nu) \operatorname{arccot}(\lambda \sqrt{2+\lambda^2})} + \frac{2(1-\nu) \ln \left( \frac{(\sqrt{2+\zeta^2}-1)(\sqrt{2+\lambda^2}+1)}{(\sqrt{2+\zeta^2}+1)(\sqrt{2+\lambda^2}-1)} \right)}{2(1-\nu) \ln \left( \frac{(3-2\sqrt{2})(\sqrt{2+\lambda^2}+1)}{\sqrt{2+\lambda^2}-1} \right) - \lambda(1-2\nu) \operatorname{arccot}(\lambda \sqrt{2+\lambda^2})}. \quad (4.29)$$

Funkcję (4.29) otrzymano przy założeniu, że  $\zeta=0$ ,  $\eta=0$ ,  $\kappa=1$ . Analogiczny wzór można uzyskać dla dowolnych wartości  $\zeta$ ,  $\eta$ ,  $\kappa$ .

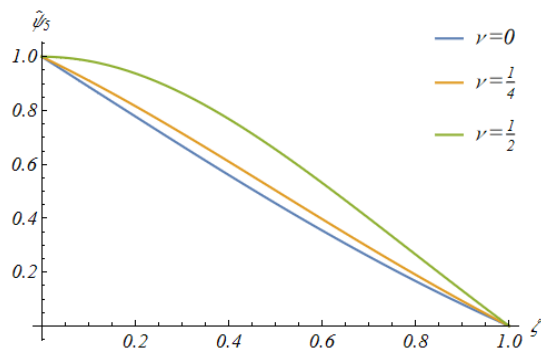
Na rys.4.39-4.42 przedstawiono wykresy funkcji zanikania przemieszczeń dla warstwy obciążonej w kształcie koła  $\hat{\psi}_4(\zeta)$  oraz kwadratu  $\hat{\psi}_5(\zeta)$ .



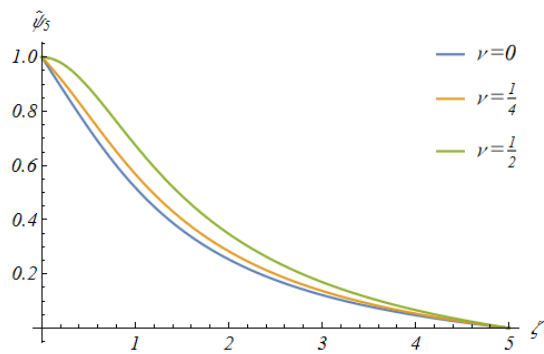
Rys.4.39. Wykres  $\hat{\psi}_4(\zeta)$  dla  $\lambda=1$ .



Rys.4.40. Wykres  $\hat{\psi}_4(\zeta)$  dla  $\lambda=5$ .



Rys.4.41. Wykres  $\hat{\psi}_5(\zeta)$  dla  $\kappa=1$ ,  $\lambda=1$ ,  $\kappa=1$ .

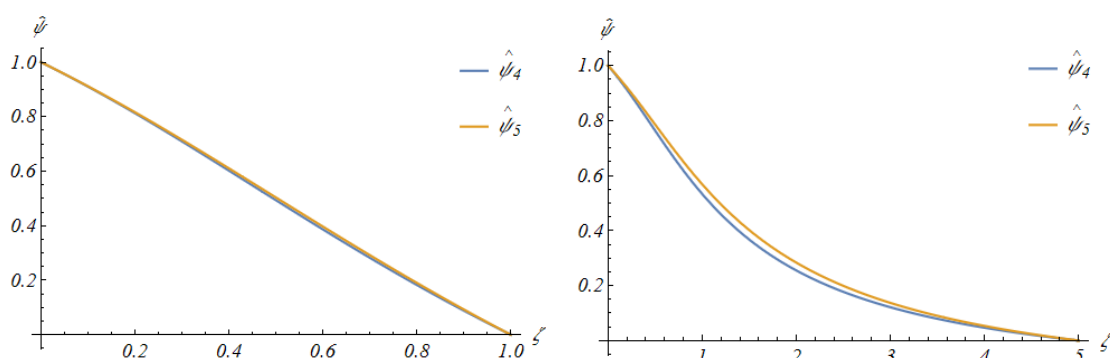


Rys.4.42. Wykres  $\hat{\psi}_5(\zeta)$  dla  $\kappa=1$ ,  $\lambda=5$ ,  $\kappa=1$ .

Zauważmy, że funkcje zanikania przemieszczeń (4.28) i (4.29), otrzymane ze zmodyfikowanych rozwiązań ścisłych, zależą wyłącznie od  $\nu$  oraz  $\lambda$  (taka sama zależność jest w przypadku rozwiązań dla półprzestrzeni). W monografii [29], s. 26, zaproponowano funkcje zanikania przemieszczeń w postaci (4.20)<sub>2,3</sub>. Te funkcje zależą od parametru gruntu  $\gamma$ , charakteryzującego szybkość zanikania przemieszczeń po głębokości

i mającego wymiar  $m^{-1}$ . W wyżej wymienionej monografii, jak już wspomniano wcześniej, nie znajdujemy opisu tego parametru, lecz tylko przyjmowano jego wartości w rozwiązanych przykładach. W dostępnej autorowi literaturze, oprócz prac [48] i [50], nie udało się znaleźć informacji dotyczącej sposobu wyznaczenia  $\gamma$ <sup>56/</sup>. Jak wynika ze wzorów (4.28) i (4.29) oraz rys.4.37-4.38, w zaproponowanych przez Vlasova i Leontieva funkcjach zanikania przemieszczeń można uniknąć konieczności stosowania parametru  $\gamma$ , natomiast operować tylko miąższością warstwy  $\lambda$ , otrzymując zmodyfikowane funkcje zanikania przemieszczeń pionowych wraz z głębokością (4.26).

Na rys.4.43-4.44 przedstawiono porównawcze wykresy funkcji zanikania przemieszczeń dla warstwy obciążonej w kształcie koła  $\hat{\psi}_4(\zeta)$  oraz kwadratu  $\hat{\psi}_5(\zeta)$ .



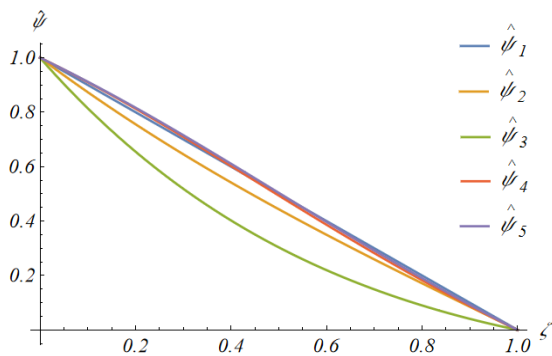
Rys.4.43. Wykres  $\hat{\psi}_4(\zeta)$  i  $\hat{\psi}_5(\zeta)$  dla  $\nu=1/4, \lambda=1$ . Rys.4.44. Wykres  $\hat{\psi}_4(\zeta)$  i  $\hat{\psi}_5(\zeta)$  dla  $\nu=1/4, \lambda=5$ .

Z rys.4.43-4.44 wynika, że rozkład przemieszczeń pionowych po głębokości warstwy nieznacznie zależy od kształtu przyłożonego obciążenia (w przypadku równomiernego obciążenia w kształcie koła i kwadratu). Tu warto zaznaczyć, że w pracy [50], w której rozpatrywano model obciążonej równomiernie belki spoczywającej na podłożu Vlasova, pokazano, że bezwymiarowymi parametrami, wpływającymi na wartość parametru  $\gamma$  i sztywność fundamentu są  $E_s/E_b, (l/d)^3, (H/l)$  oraz obciążenie. Ponadto pokazano, że dla równomiernie rozłożonego obciążenia parametr  $\gamma$  jest niezależny od  $E_s/E_b$  i  $(l/d)^3$ . Także autorzy stwierdzili, że powyższe zależności nie dotyczą innych rodzajów obciążenia.

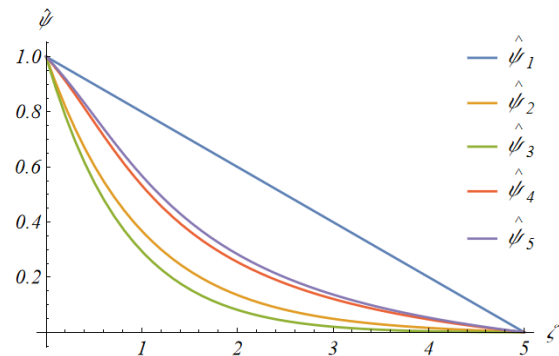
Jak wynika z analizy wzorów (4.28) i (4.29), oraz rys.4.43-4.44, funkcja zanikania przemieszczeń, w przypadku równomiernego obciążenia na powierzchni w kształcie koła lub kwadratu, prawie nie zależy od jego kształtu.

<sup>56/</sup> Oczywiście jest, że ten współczynnik zależy nie tylko od rodzaju gruntu, ale też od intensywności i charakteru obciążenia (np. przekazywanego przez konstrukcję).

Na rys.4.45-4.46, przedstawiono porównawcze wykresy funkcji zanikania przemieszczeń (4.26)<sub>1,2,3</sub>, (4.28) i (4.29).



Rys.4.45. Wykres  $\hat{\psi}(\zeta)$  dla  $\nu=1/4, \lambda=1$ .



Rys.4.46. Wykres  $\hat{\psi}(\zeta)$  dla  $\nu=1/4, \lambda=5$ .

Jak wynika z rys.4.45-4.46, dla małych wartości  $\lambda$  zmodyfikowane funkcje (4.26)<sub>2,3</sub>, (4.28) i (4.29) są zbliżone do liniowej funkcji zanikania przemieszczeń (4.26)<sub>1</sub>. Dla większych wartości  $\lambda$  liniowa funkcja (4.26)<sub>1</sub> nie nadaje się do aproksymacji przemieszczeń po głębokości warstwy, co pokazano w Rozdziale 5.

Podsumowując, w celu aproksymacji przemieszczeń po głębokości rozpatrywanej warstwy, można przyjąć funkcje zanikania przemieszczeń w postaci (4.26)<sub>1,2,3</sub>, (4.28) i (4.29) dla warstwy obciążonej na powierzchni odpowiednio w kształcie koła i kwadratu. Dla małych wartości  $\lambda$ , w celu aproksymacji przemieszczeń względem osi  $\zeta$ , można stosować zmodyfikowane funkcje (4.26)<sub>1,2,3</sub>. Zaproponowane funkcje nie zawierają parametru  $\gamma$ , charakteryzującego szybkość zanikania przemieszczeń po głębokości warstwy. W dalszej części pracy, w celu aproksymacji przemieszczeń po głębokości, będą przyjmowane tylko zmodyfikowane funkcje (4.26)<sub>1,2,3</sub>, a także funkcje bazujące na rozwiązaniu ścisłym teorii sprężystości (4.28) i (4.29).



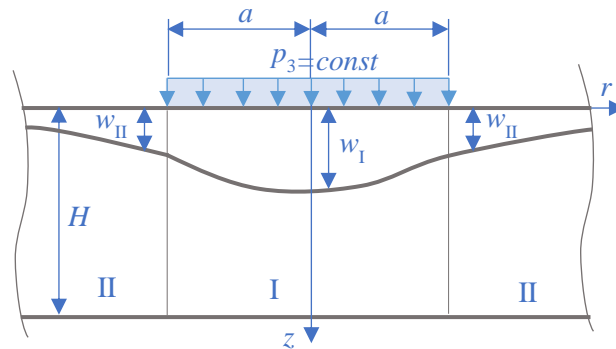
## 5. WERYFIKACJA MODELU PODŁOŻA VLASOVA

### 5.1 Cel rozdziału

Weryfikację modelu podłoża Vlasova wykonano na podstawie rozwiązań ścisłych teorii sprężystości, uzyskanych dla warstwy sprężystej poddanej obciążeniu w kształcie koła oraz kwadratu. W tym celu porównano wartości przemieszczeń uzyskanych według teorii sprężystości oraz modelu podłoża Vlasova.

### 5.2 Warstwa obciążona równomiernie na powierzchni koła

Rozpatrzmy zagadnienie warstwy sprężystej, obciążonej równomiernie na powierzchni w kształcie koła o promieniu  $a$  (rys.5.1).



Rys.5.1. Warstwa sprężysta obciążona w kształcie koła.

Przemieszczenia pionowe warstwy o warunkach brzegowych odpowiadających warstwie sztywno połączonej z podłożem nieściśliwym (3.55) oraz warstwie z poślizgiem (3.56) według teorii sprężystości są podane w podrozdziale 3.3.2.

Równania różniczkowe (2.8) statyki warstwy gruntu według modelu podłoża Vlasova, w układzie współrzędnych walcowych, zapiszemy następująco:

$$k_2 \left( \frac{d^2 w_I}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw_I}{dr} \right) - k_1 w_I + p = 0, \quad (5.1)$$

$$k_2 \left( \frac{d^2 w_{II}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw_{II}}{dr} \right) - k_1 w_{II} = 0,$$

gdzie:

$k_1$  i  $k_2$  – parametry całkowe, określone odpowiednio wzorami (2.9)<sub>1,2</sub>,

$w_I$  – przemieszczenie pionowe w przedziale  $0 \leq r \leq a$ ,

$w_{II}$  – przemieszczenie pionowe dla  $r \geq a$ .

Rozwiązanie równania różniczkowego (5.1) zapiszemy w postaci:

$$\begin{aligned} w_I(r) &= C_1 I_0(\beta r) + C_2 K_0(\beta r) + \frac{p}{k_1}, \\ w_{II}(r) &= C_3 I_0(\beta r) + C_4 K_0(\beta r), \end{aligned} \quad (5.2)$$

gdzie:

$I_0$  i  $K_0$  – zmodyfikowane funkcje Bessela zerowego rzędu, odpowiednio pierwszego i drugiego rodzaju [80], a  $C_i$  – stałe całkowania ( $i=1, 2, 3, 4$ ).

W celu wyznaczenia stałych  $C_i$  wykorzystamy następujące warunki brzegowe oraz warunki ciągłości:

$$\left. \frac{dw_I}{dr} \right|_{r=0} = 0, \quad w_{II}|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad w_I|_{r=a} = w_{II}|_{r=a}, \quad \left. \frac{dw_I}{dr} \right|_{r=a} = \left. \frac{dw_{II}}{dr} \right|_{r=a}. \quad (5.3)$$

Po uwzględnieniu warunków (5.3), stałe całkowania  $C_i$  są równe:

$$C_1 = -\frac{ap}{k_1} \alpha K_1(\beta a), \quad C_2 = 0, \quad C_3 = 0, \quad C_4 = \frac{ap}{k_1} \beta I_1(\beta a), \quad (5.4)$$

gdzie:

$I_1$  i  $K_1$  – są zmodyfikowanymi funkcjami Bessela pierwszego rzędu, odpowiednio pierwszego i drugiego rodzaju [80],

$$\beta = \sqrt{\frac{k_1}{k_2}}, \quad (5.5)$$

przy czym  $\beta$  ma wymiar  $[1/m]$ .

Przechodząc do bezwymiarowego układu współrzędnych (3.46)<sub>1,2</sub>, otrzymamy następujące wzory na przemieszczenia pionowe

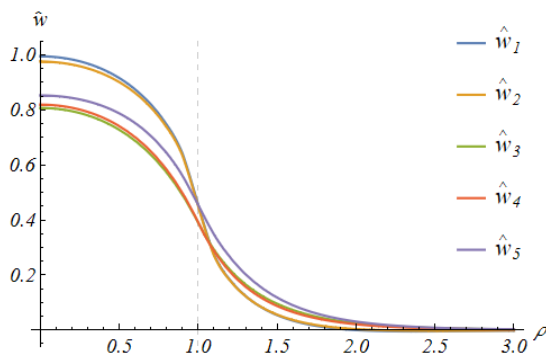
$$\begin{aligned} w_I(\rho, \zeta) &= \frac{(1-\beta a)ap}{k_1} K_1(\beta a) I_0(\rho \beta a) \psi(\zeta), \\ w_{II}(\rho, \zeta) &= \frac{ap\beta}{k_1} I_1(\beta a) K_0(\rho \beta a) \psi(\zeta). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Przyjmując funkcje zanikania przemieszczeń  $\psi(\zeta)$  według wzorów (2.9) wyznaczmy parametry całkowite  $k_1$  i  $k_2$ , a następnie przemieszczenia (5.6). Poniżej na rysunkach zostaną przedstawione porównawcze wykresy przemieszczeń pionowych warstwy o miąższości  $\lambda=H/a$ , otrzymane według teorii sprężystości oraz według modelu podłoża Vlasova. Na poniższych wykresach przyjęto następujące oznakowania krzywych<sup>57/</sup>:

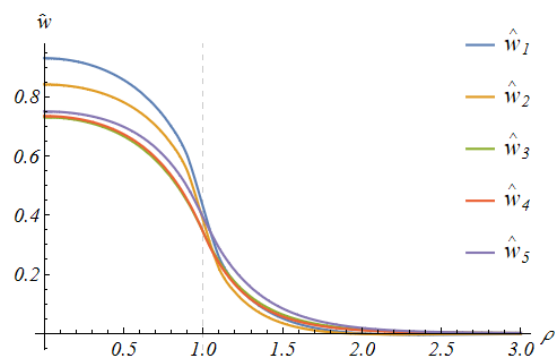
<sup>57/</sup> Podano bezwymiarowe wartości przemieszczeń (patrz odnośnik nr 32, s. 44). Oznaczenia dotyczą rys.5.2-5.13.

- 1)  $\hat{w}_1$  – przemieszczenie warstwy z poślizgiem według teorii sprężystości (TS);
- 2)  $\hat{w}_2$  – przemieszczenie warstwy sztywno połączonej z podłożem według TS;
- 3)  $\hat{w}_3$  – przemieszczenie warstwy według modelu podłoża Vlasova dla liniowej funkcji zanikania przemieszczeń (4.26)<sub>1</sub>;
- 4)  $\hat{w}_4$  – przemieszczenie warstwy według modelu podłoża Vlasova dla hiperbolicznej funkcji zanikania przemieszczeń (4.26)<sub>2</sub>;
- 5)  $\hat{w}_5$  – przemieszczenie warstwy według modelu podłoża Vlasova dla funkcji zanikania przemieszczeń (4.28).

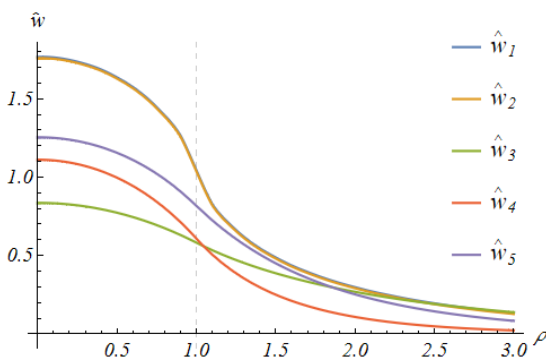
Na rys.5.2-5.5 przedstawiono wykresy przemieszczeń pionowych  $\hat{w}(\rho, 0)$ , natomiast na rys.5.6-5.9 przedstawiono wykresy  $\hat{w}(0, \zeta)$ .



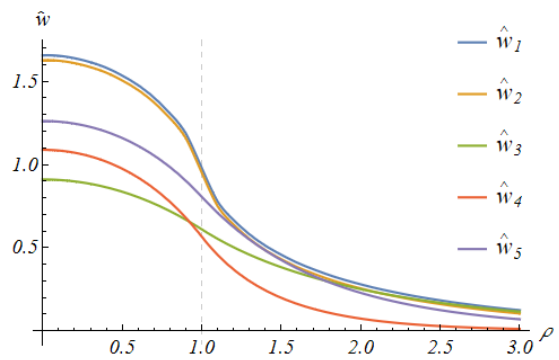
Rys.5.2. Wykres  $\hat{w}(\rho, 0)$  dla  $\nu=0, \lambda=1$ .



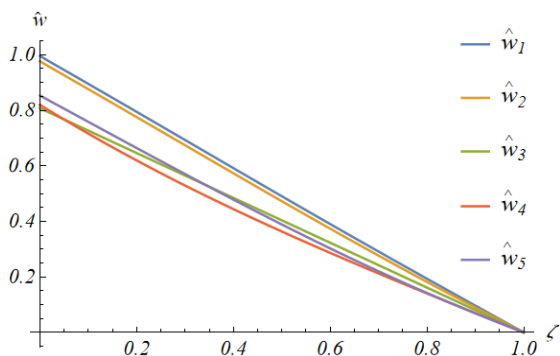
Rys.5.3. Wykres  $\hat{w}(\rho, 0)$  dla  $\nu=1/4, \lambda=1$ .



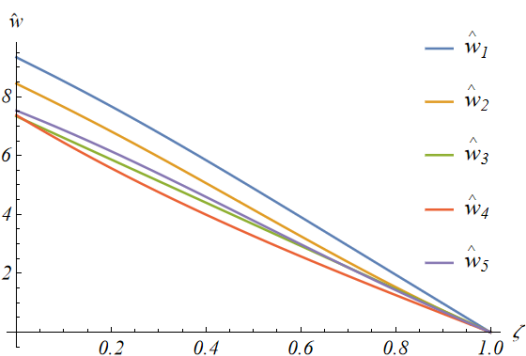
Rys.5.4. Wykres  $\hat{w}(\rho, 0)$  dla  $\nu=0, \lambda=5$ .



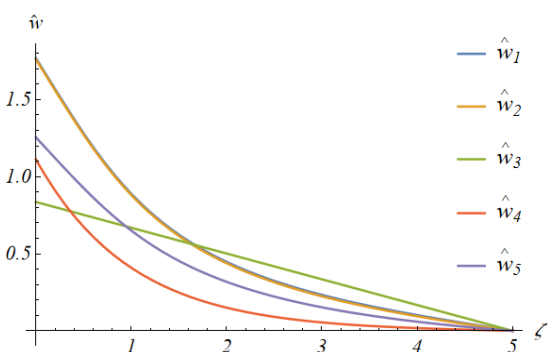
Rys.5.5. Wykres  $\hat{w}(\rho, 0)$  dla  $\nu=1/4, \lambda=5$ .



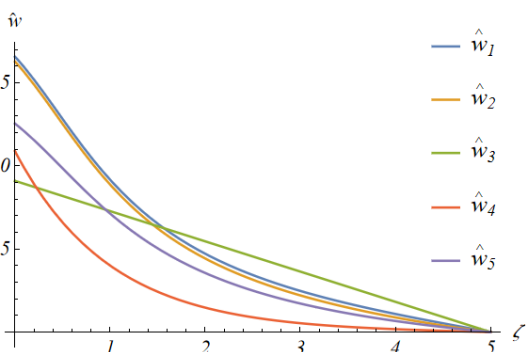
Rys.5.6. Wykres  $\hat{w}(0, \zeta)$  dla  $\nu=0, \lambda=1$ .



Rys.5.7. Wykres  $\hat{w}(0, \zeta)$  dla  $\nu=1/4, \lambda=1$ .

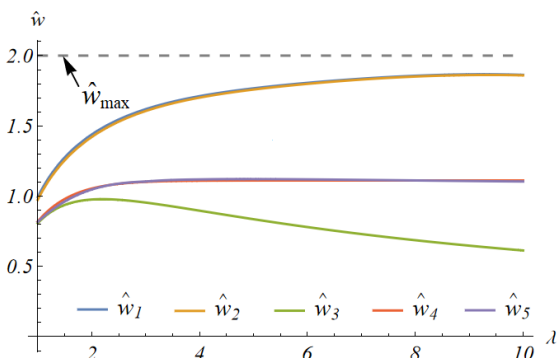


Rys.5.8. Wykres  $\hat{w}(0, \zeta)$  dla  $\nu=0, \lambda=5$ .

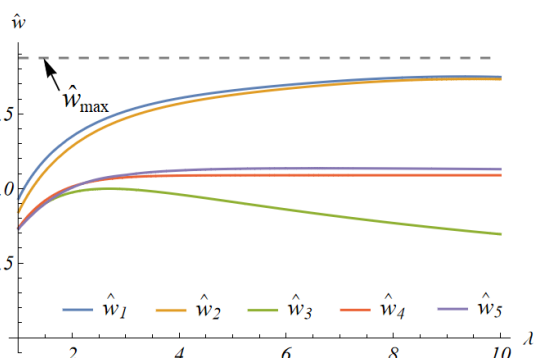


Rys.5.9. Wykres  $\hat{w}(0, \zeta)$  dla  $\nu=1/4, \lambda=5$ .

Na rys.5.10-5.11 przedstawiono wykresy zależności maksymalnych przemieszczeń pionowych  $\hat{w}(0, 0, \lambda)$  od  $\lambda$ , otrzymane według teorii sprężystości oraz według modelu podłoża Vlasova.



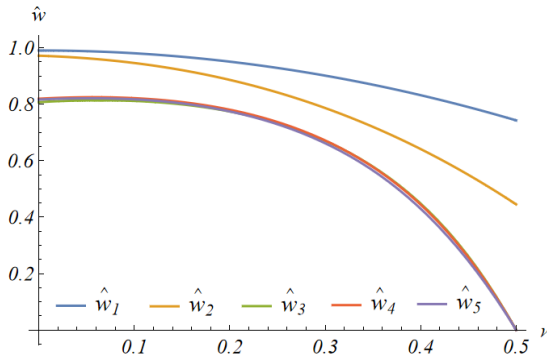
Rys.5.10. Wykres  $\hat{w}(0, 0, \lambda)$  dla  $\nu=0$ .



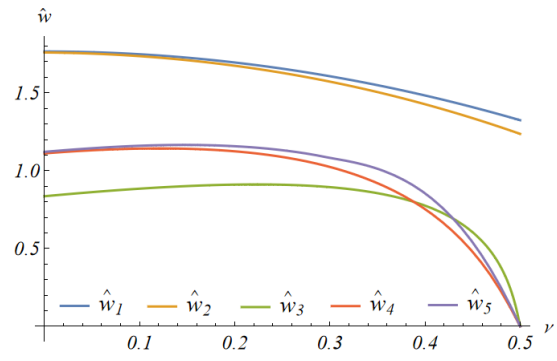
Rys.5.11. Wykres  $\hat{w}(0, 0, \lambda)$  dla  $\nu=1/4$ .

Z rys.5.10-5.11 wynika, że przemieszczenia dla liniowej funkcji zanikania (4.26)<sub>1</sub> przy wzroście  $\lambda$  dążą do zera, natomiast dla hiperbolicznej funkcji zanikania (4.26)<sub>2</sub> oraz funkcji (4.28) szybko stabilizują się.

Na rys.5.12-5.13 przedstawiono wykresy zależności maksymalnych przemieszczeń pionowych  $\hat{w}(0, 0, \nu)$  od  $\nu$ , otrzymane według teorii sprężystości oraz według modelu podłoża Vlasova.



Rys.5.12. Wykres  $\hat{w}(0,0,\nu)$  dla  $\lambda=1$ .



Rys.5.13. Wykres  $\hat{w}(0,0,\nu)$  dla  $\lambda=5$ .

Z rys.5.12-5.13 wynika, że przemieszczenia pionowe według modelu Vlasova dla  $\nu=1/2$  są równe zeru, natomiast według teorii sprężystości są różne od zera. Także z rys.5.2-5.11 wynika, że przemieszczenia pionowe, obliczone według modelu podłoża Vlasova (przy założeniu różnych funkcji zanikania przemieszczeń), mają znaczną różnicę w porównaniu z rozwiązaniem ścisłym teorii sprężystości. Różnica rośnie wraz ze wzrostem wartości  $\lambda=H/a$ .

Warto podkreślić, że przechodząc z miąższością warstwy do półprzestrzeni ( $\lambda \rightarrow \infty$ ), przemieszczenia pionowe wyznaczone według modelu podłoża Vlasova przy założeniu liniowej funkcji zanikania w postaci (4.26)<sub>1</sub> dążą do zera. Ten wynik jest niezgodny z rozwiązaniem ścisłym teorii sprężystości. Natomiast przemieszczenia, dla dowolnej wartości  $\lambda$  (rys.5.10-5.11), w przypadku założenia hiperbolicznej funkcji zanikania przemieszczeń (4.26)<sub>2</sub>, szybko stabilizują się i już dla  $\lambda > 3$  osiągają wartość maksymalną 1,111 (dla  $\nu=0$ ) i 1,088 (dla  $\nu=1/4$ ).

W tab.5.1 przedstawiono wartości przemieszczeń pionowych, otrzymane według teorii sprężystości dla warstwy z poślizgiem  $\hat{w}_{ts}$  oraz według modelu podłoża Vlasova, przy założeniu funkcji zanikania przemieszczeń w postaci (4.26)<sub>1,2</sub>.

Tab.5.1. Porównanie wartości przemieszczeń dla  $\nu=1/4$ .

$\lambda$	$\rho=0$					$\rho=1$				
	$\hat{w}_{ts}$	$\hat{\psi}_1$	Błąd, %	$\hat{\psi}_2$	Błąd, %	$\hat{w}_{ts}$	$\hat{\psi}_1$	Błąd, %	$\hat{\psi}_2$	Błąd, %
1	0,933	0,733	21,4	0,736	21,1	0,42	0,343	18,3	0,342	18,6
2	1,349	0,973	27,9	1,011	25,1	0,705	0,524	25,7	0,508	27,9
5	1,656	0,909	45,1	1,087	34,4	0,979	0,609	37,8	0,565	42,3
10	1,757	0,693	60,6	1,088	38,1	1,087	0,520	52,2	0,566	47,9

W tab.5.2 przedstawiono wartości przemieszczeń pionowych, otrzymane według teorii sprężystości dla warstwy sztywno połączonej z podłożem nieściśliwym  $\hat{w}_{ts}$  oraz

według modelu podłoża Vlasova, przy założeniu funkcji zanikania przemieszczeń w postaci (4.26)<sub>1,2</sub>.

Tab.5.2. Porównanie wartości przemieszczeń dla  $\nu=1/4$ .

$\lambda$	$\rho=0$					$\rho=1$				
	$\hat{w}_{ts}$	$\hat{\psi}_1$	Błąd, %	$\hat{\psi}_2$	Błąd, %	$\hat{w}_{ts}$	$\hat{\psi}_1$	Błąd, %	$\hat{\psi}_2$	Błąd, %
1	0,84	0,733	12,7	0,736	12,4	0,38	0,343	9,7	0,342	10,0
2	1,284	0,973	24,2	1,011	21,3	0,654	0,524	19,9	0,508	22,3
5	1,627	0,909	44,1	1,087	33,2	0,951	0,609	36,0	0,565	40,6
10	1,743	0,693	60,2	1,088	37,6	1,07	0,520	51,4	0,566	47,1

Jak wynika z rys.5.2-5.11 oraz z tab.5.1-5.2, wartości przemieszczenia pionowego, otrzymane według modelu podłoża Vlasova są rozbieżne z rozwiązaniem ścisłym teorii sprężystości, w szczególności dla większych miąższości warstwy  $\lambda$ . Im większa jest wartość  $\lambda$ , tym większa jest różnica pomiędzy rozwiązaniem ścisłym a przybliżonym. W przypadku warstwy sztywno połączonej z podłożem nieściśliwym różnica pomiędzy przemieszczeniami według modelu Vlasova oraz rozwiązaniem ścisłym teorii sprężystości jest mniejsza.

### 5.3 Warstwa obciążona równomiernie na powierzchni prostokąta

Rozpatrzmy zagadnienie warstwy sprężystej obciążonej na powierzchni w kształcie prostokąta (rys.3.24-3.25). Rozwiązanie tego zagadnienia według teorii sprężystości zostało przedstawione w podrozdziale 3.2.3. Natomiast równanie różniczkowe, opisujące zależności pomiędzy przemieszczeniem a obciążeniem zewnętrznym według modelu podłoża Vlasova, zapiszemy w postaci (patrz podpunkt 2.2)

$$k_2 \nabla^2 w - k_1 w + p_3 = 0. \quad (5.7)$$

Obciążenie powierzchniowe w kształcie prostokąta zapiszemy następująco:

$$p_3(x, y) = p = const \text{ dla } -a \leq x_1 = x \leq a, \quad -b \leq x_2 = y \leq b \quad (5.8)$$

gdzie:

$p$  – obciążenie powierzchniowe w jednostkach  $[Nm^{-2}]$ ,

$a, b$  – wymiary przyłożonego obciążenia w kształcie prostokąta,  $[m]$ .

Do równania (5.7) zastosujemy podwójną transformatę cosinusową Fouriera, zdefiniowaną wzorem (3.34). W wyniku otrzymamy następujące równanie algebraiczne na transformatę funkcji przemieszczeń pionowych

$$-\left[k_1 + k_2(s^2 + t^2)\right]\tilde{w} + \tilde{p}_3 = 0, \quad (5.9)$$

gdzie:

$$\tilde{p}_3 = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty p_3 \cos(sx) \cos(ty) = \frac{2p \sin(as) \sin(bt)}{\pi st}, \quad (5.10)$$

$k_1$  i  $k_2$  – są podane wzorami (2.9)<sub>1,2</sub>.

Rozwiązując równania algebraiczne (5.9), otrzymamy następującą transformatę funkcji przemieszczeń pionowych

$$\tilde{w} = \frac{2p \sin(as) \sin(bt)}{\pi st \left[ k_1 + k_2(s^2 + b^2) \right]}. \quad (5.11)$$

Obliczanie retransformaty przemieszczeń (5.11) w postaci zamkniętego wzoru analitycznego jest uciążliwe. Autorowi nie udało się uzyskać wyników w postaci analitycznych wzorów zamkniętych. W celu wyznaczenia przemieszczeń zastosowano całkowanie numeryczne, wykonane za pomocą programu *Wolfram Matematica 13*.

Przyjmując funkcje zanikania przemieszczeń wraz z głębokością według wzorów (2.9) wyznaczmy parametry całkowite  $k_1$  i  $k_2$ , a zatem i retransformatę przemieszczeń (5.11).

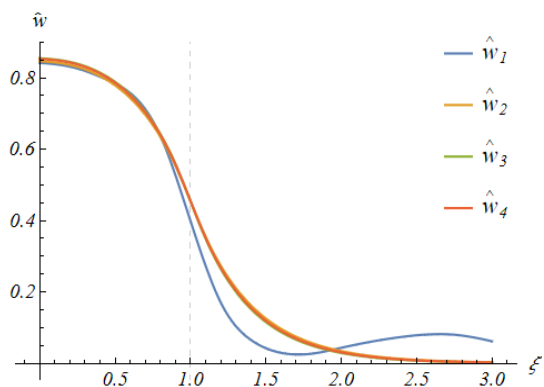
Na rysunkach poniżej zostaną przedstawione wykresy przemieszczeń pionowych, otrzymane według teorii sprężystości oraz według modelu podłoża Vlasova dla warstwy obciążonej w kształcie kwadratu o wymiarach boków  $2a \times 2a$ <sup>58/</sup>. Na wykresach przyjęto następujące oznakowania krzywych<sup>59/</sup>:

- 1)  $\hat{w}_1$  – przemieszczenie warstwy według teorii sprężystości (patrz podpunkt 3.2.3);
- 2)  $\hat{w}_2$  – przemieszczenie warstwy według modelu Vlasova dla przyjętej liniowej funkcji zanikania przemieszczeń (4.26)<sub>1</sub>;
- 3)  $\hat{w}_3$  – przemieszczenie według modelu Vlasova dla przyjętej hiperbolicznej funkcji zanikania przemieszczeń (4.26)<sub>2</sub>;
- 4)  $\hat{w}_4$  – przemieszczenie według modelu Vlasova dla przyjętej funkcji zanikania przemieszczeń (4.29).

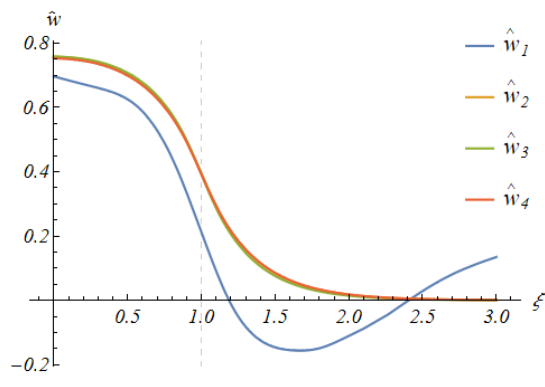
Na rys.5.14-5.19 przedstawiono wykresy przemieszczeń pionowych  $\hat{w}(\xi, 0, 0)$ ,  $\hat{w}(0, 0, \zeta)$ , otrzymane według teorii sprężystości oraz według modelu podłoża Vlasova.

<sup>58/</sup> Podano bezwymiarowe wartości przemieszczeń (patrz odnośnik nr 32, s. 44).

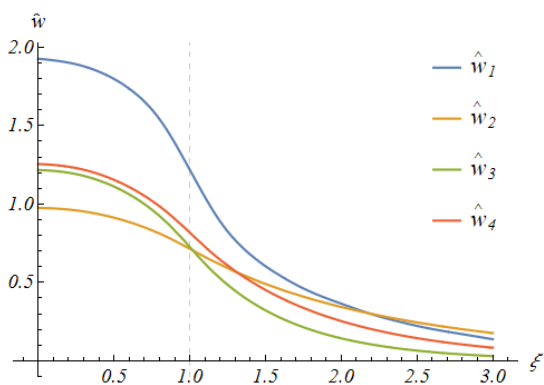
<sup>59</sup> Oznaczenia dotyczą rys.5.14-5.5.21.



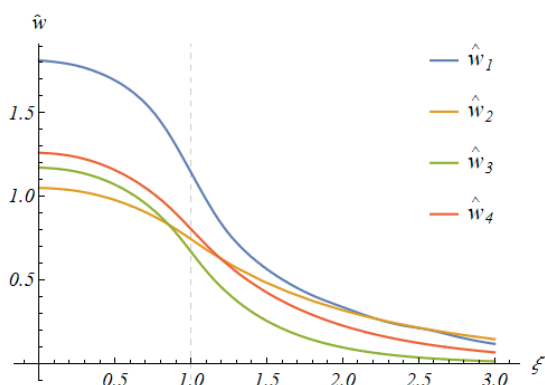
Rys.5.14. Wykres  $\hat{w}(\xi, 0, 0)$  dla  $\nu=0, \lambda=1$ .



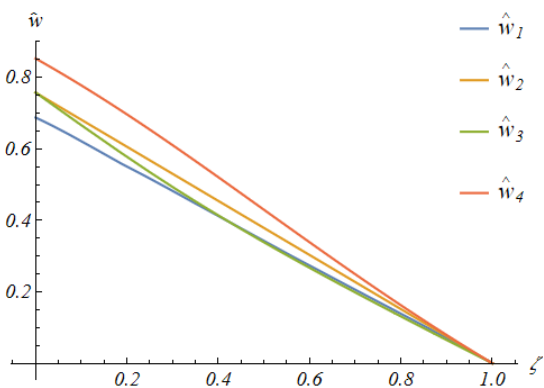
Rys.5.15. Wykres  $\hat{w}(\xi, 0, 0)$  dla  $\nu=1/4, \lambda=1$ .



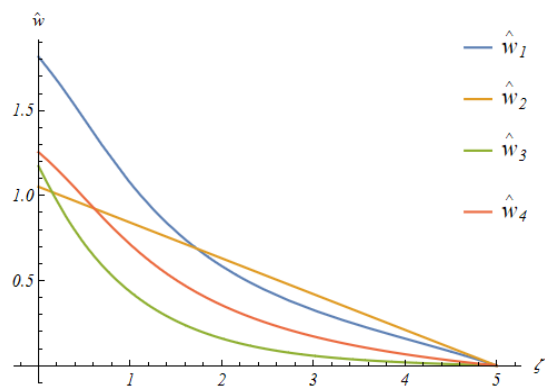
Rys.5.16. Wykres  $\hat{w}(\xi, 0, 0)$  dla  $\nu=0, \lambda=5$ .



Rys.5.17. Wykres  $\hat{w}(\xi, 0, 0)$  dla  $\nu=1/4, \lambda=5$ .



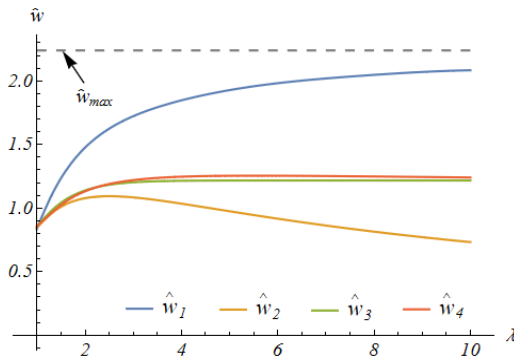
Rys.5.18. Wykres  $\hat{w}(0, 0, \zeta)$  dla  $\nu=1/4, \lambda=1$ .



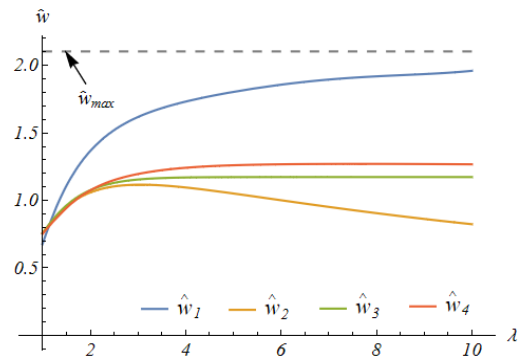
Rys.5.19. Wykres  $\hat{w}(0, 0, \zeta)$  dla  $\nu=1/4, \lambda=5$ .

Na rys.5.20-5.21 przedstawiono wykresy zależności maksymalnych przemieszczeń pionowych  $\hat{w}(0, 0, 0, \lambda)$  od  $\lambda$ , otrzymane według teorii sprężystości oraz według modelu podłoża Vlasova.





Rys.5.20. Wykres  $\hat{w}(0,0,0,\lambda)$  dla  $\nu=0$ .



Rys.5.21. Wykres  $\hat{w}(0,0,0,\lambda)$  dla  $\nu=1/4$ .

W tab.5.3 przedstawiono wartości przemieszczeń pionowych wyznaczonych w przekroju  $\zeta=0, \eta=0, \zeta=0$ .

Tab.5.3. Porównanie wyników przemieszczeń pionowych.

$\lambda$	$\nu=0$				$\nu=1/4$			
	$\hat{w}_1$	$\hat{w}_2$	$\hat{w}_3$	$\hat{w}_4$	$\hat{w}_1$	$\hat{w}_2$	$\hat{w}_3$	$\hat{w}_4$
1	0,836	0,847	0,853	0,853	0,688	0,757	0,757	0,752
2	1,447	1,11	1,16	1,141	1,373	1,061	1,078	1,084
5	1,927	1,03	1,244	1,254	1,805	1,051	1,172	1,261
10	2,083	0,782	1,245	1,24	1,956	0,823	1,173	1,267

Podsumowując, jak wynika z rys.5.14-5.21 oraz z tab.5.3, wartości przemieszczeń pionowych, otrzymane według modelu podłoża Vlasova są mniejsze od przemieszczeń według teorii sprężystości dla  $\lambda > 1$ . W przypadku  $\lambda=1$  przemieszczenia, uzyskane na podstawie modelu podłoża Vlasova są większe od przemieszczeń według teorii sprężystości, niezależnie od przyjętej funkcji zanikania. Analogicznie jak w przypadku warstwy obciążonej w kształcie koła, wraz ze wzrostem wartości  $\lambda$  przemieszczenia według modelu Vlasova szybko stabilizują się.

Zgodnie z założeniami modelu Vlasova, przemieszczenia poziome są równe zero. Nieuwzględnienie wpływu tych przemieszczeń może powodować zaniżenie wartości przemieszczeń pionowych w porównaniu z rozwiązaniem ścisłym teorii sprężystości. W związku z powyższym, dalej przedstawiono zmodyfikowany model podłoża sprężystego, przy założeniu między innymi, że przemieszczenia poziome są różne od zera.

## 6. ZMODYFIKOWANY MODEL PODŁOŻA

### 6.1 Cel rozdziału

Celem tego rozdziału jest przedstawienie podstawowych równań i zależności zmodyfikowanego modelu podłoża. W ogólnym przypadku zostanie wyprowadzony niejednorodny (w kierunku  $x_3=z$ ), poprzecznie izotropowy model podłoża. Również w tym rozdziale zostaną przedstawione zmodyfikowane modele, powstałe bądź na różnych założeniach kinematycznych, bądź na uwzględnieniu lub nie poprzecznej izotropii i niejednorodności po głębokości warstwy charakterystyk materiałowych. Równania zmodyfikowanego modelu są otrzymane poprzez ortogonalizację równań równowagi teorii sprężystości sposobem Galerkina.

### 6.2 Podstawowe założenia

W modelu podłoża Vlasova stałe materiałowe  $E$  i  $\nu$  są niezależne od zmiennej  $x_3=z$ , a także statyka warstwy gruntu jest rozpatrywana dla ośrodka izotropowego<sup>60/</sup>. W rzeczywistości te założenia są mało realne. „Stałe materiałowe” w ogólnym przypadku mogą być funkcjami zmiennych przestrzennych, a ośrodek gruntowy nie jest izotropowy.

Model poprzecznie izotropowy charakteryzowany jest przez 5 niezależnych stałych materiałowych [11], s. 91, [58], s. 162-163, [61], s. 18, [81], s. 102:  $E_1$ ,  $E_3$ ,  $G_3$ ,  $\nu_1$ ,  $\nu_3$ . Podstawowe wzory dla ośrodka poprzecznie izotropowego podane są w Załączniku 2, pkt.7.

Naprężenia  $\sigma_{ij}$  zapiszemy w postaci:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= C_{11}\varepsilon_{11} + C_{12}\varepsilon_{22} + C_{13}\varepsilon_{33}, \\ \sigma_{22} &= C_{12}\varepsilon_{11} + C_{11}\varepsilon_{22} + C_{13}\varepsilon_{33}, \\ \sigma_{33} &= C_{13}\varepsilon_{11} + C_{13}\varepsilon_{22} + C_{33}\varepsilon_{33} \\ \sigma_{23} &= 2G_3\varepsilon_{23}, \quad \sigma_{13} = 2G_3\varepsilon_{13}, \quad \sigma_{12} = 2G_1\varepsilon_{12},\end{aligned}\tag{6.1}$$

gdzie parametry sprężystości są równe:

---

<sup>60/</sup> W monografii [29], s. 43 rozpatrywane również podłoża dwuwarstwowe, znajdujące się w PSO.

$$\begin{aligned}
C_{11} &= \frac{E_1(E_1\nu_3^2 - E_3)}{(1+\nu_1)(2E_1\nu_3^2 - (1-\nu_1)E_3)}, \\
C_{12} &= -\frac{E_1(E_3\nu_1 + E_1\nu_3^2)}{(1+\nu_1)(2E_1\nu_3^2 - (1-\nu_1)E_3)}, \quad C_{13} = -\frac{E_1E_3\nu_3}{2E_1\nu_3^2 - (1-\nu_1)E_3}, \\
C_{33} &= -\frac{(1-\nu_1)E_3^2}{2E_1\nu_3^2 - (1-\nu_1)E_3}, \quad G_1 = \frac{C_{11} - C_{12}}{2} = \frac{E_1}{2(1+\nu_1)}.
\end{aligned} \tag{6.2}$$

We wzorze (6.2) wprowadzono oznaczenia<sup>61/</sup>:

$E_1$  – moduł Younga w płaszczyźnie  $x_3 = \text{const}$  (płaszczyzna izotropii),

$E_3$  – moduł Younga w kierunku osi  $x_3$  (w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny izotropii),

$G_1 = \frac{E_1}{2(1+\nu_1)}$  – moduł Kirchhoffa w płaszczyźnie  $x_3 = \text{const}$ ,

$G_3$  – moduł Kirchhoffa w kierunku osi  $x_3$ ,

$\nu_1$  – współczynnik Poissona w „płaszczyźnie”  $x_3 = \text{const}$ ,

$\nu_3$  – współczynnik Poissona w „kierunku”<sup>62/</sup> osi  $x_3$ .

W odróżnieniu od modelu podłoża Vlasova zakładamy, że parametry techniczne (6.2), są funkcjami zmiennej  $z$ <sup>63/</sup>:

$$\begin{aligned}
E_1 &= E_1(z), \quad E_3 = E_3(z), \\
\nu_1 &= \nu_1(z), \quad \nu_3 = \nu_3(z), \\
G_1 &= G_1(z), \quad G_3 = G_3(z).
\end{aligned} \tag{6.3}$$

Wprowadźmy następujące oznaczenia parametrów (6.3) dla płaszczyzny  $z=0$ :

$$\begin{aligned}
E_{10} &= E_1(0), \quad E_{30} = E_3(0), \\
\nu_{10} &= \nu_1(0), \quad \nu_{30} = \nu_3(0), \\
G_{10} &= G_1(0) = \frac{E_{10}}{2(1+\nu_{10})}, \quad G_{30} = G_3(0),
\end{aligned} \tag{6.4}$$

<sup>61/</sup> Patrz Załącznik 2, pkt.7.

<sup>62/</sup> Użyto cudzysłowu, bo  $\nu_1$  jest współczynnikiem charakteryzującym reakcję materiału na działanie naprężeń w płaszczyźnie izotropii, a  $\nu_3$  zaś – jest reakcją materiału na działanie naprężeń w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny izotropii.

<sup>63/</sup> Warto zaznaczyć, że w literaturze znajdujemy modele podłoża, w którym charakterystyki materiałowe są zmienne po głębokości warstwy, patrz np. [84], [85], s. 51.

a także funkcje charakteryzujące zmianę odpowiednio modułów Younga  $E_1$  i  $E_3$ , współczynników Poissona  $\nu_1$  i  $\nu_3$  oraz modułów Kirchhoffa  $G_1$  i  $G_3$  wraz z głębokością:

$$\begin{aligned} E_1(z) &= \alpha_1(z)E_{10}, & E_3(z) &= \alpha_3(z)E_{30}, \\ \nu_1(z) &= \beta_1(z)\nu_{10}, & \nu_3(z) &= \beta_3(z)\nu_{30}, \\ G_1(z) &= \gamma_1(z)G_{10}, & G_3(z) &= \gamma_3(z)G_{30}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Funkcje  $\alpha_1(z)$  i  $\alpha_3(z)$ ,  $\beta_1(z)$  i  $\beta_3(z)$ ,  $\gamma_1(z)$  i  $\gamma_3(z)$  opisują zmianę po głębokości warstwy sztywności oraz współczynników Poissona gruntu.

Wprowadźmy również parametry  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , które są ilorazami stałych materiałowych w płaszczyźnie  $z=const$  do stałych materiałowych w kierunku osi  $z$ :

$$\alpha = \frac{E_{10}}{E_{30}}, \quad \beta = \frac{\nu_{10}}{\nu_{30}}, \quad \gamma = \frac{G_{10}}{G_{30}}. \quad (6.6)$$

Wzory (6.3), uwzględniając (6.5) i (6.6), zapiszemy w następującej postaci:

$$\begin{aligned} E_1(z) &= E_{30}\alpha\alpha_1(z), & E_3(z) &= E_{30}\alpha_3(z), \\ \nu_1(z) &= \nu_{30}\beta\beta_1(z), & \nu_3(z) &= \nu_{30}\beta_3(z), \\ G_1(z) &= E_{30}\gamma_3(z), & G_3(z) &= G_{30}\gamma_3(z). \end{aligned} \quad (6.7)$$

W przypadku, kiedy współczynniki  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  są równe 1, będziemy mieli do czynienia z ośrodkiem izotropowym, w którym charakterystyki materiałowe  $E$  i  $\nu$  zależą od zmiennej  $z$ . Jeżeli funkcje  $\alpha_1=\alpha_1(z)$ ,  $\alpha_3=\alpha_3(z)$ ,  $\beta_1=\beta_1(z)$ ,  $\beta_3=\beta_3(z)$ ,  $\gamma_1=\gamma_1(z)$ ,  $\gamma_3=\gamma_3(z)$  są stałymi wartościami oraz  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  są równe 1, to otrzymamy założenia modelu podłoża sprężystego Vlasova (ośrodek izotropowy, w którym stałe techniczne nie zależą od zmiennej  $x_3$ ). Uwzględniając zależności (6.7), zmienne parametry sprężystości (6.2) zapiszemy w postaci:

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{\alpha\alpha_1 E_{30} (\alpha\alpha_1 \beta_3^2 \nu_{30}^2 - \alpha_3)}{(1 + \beta\beta_1 \nu_{30}) [2\alpha\alpha_1 \beta_3^2 \nu_{30}^2 + \alpha_3 (\beta\beta_1 \nu_{30} - 1)]}, \\ C_{12} &= -\frac{\alpha\alpha_1 E_{30} \nu_{30} (\beta\alpha_3 \beta_1 + \alpha\alpha_1 \beta_3^2 \nu_{30})}{(1 + \beta\beta_1 \nu_{30}) [2\alpha\alpha_1 \beta_3^2 \nu_{30}^2 + \alpha_3 (\beta\beta_1 \nu_{30} - 1)]}, \\ C_{13} &= \frac{\alpha\alpha_1 \alpha_3 \beta_3 E_{30} \nu_{30}}{\alpha_3 - \beta\alpha_3 \beta_1 \nu_{30} - 2\alpha\alpha_1 \beta_3^2 \nu_{30}^2}, \\ C_{33} &= \frac{\alpha_3^2 E_{30} (\beta\beta_1 \nu_{30} - 1)}{2\alpha\alpha_1 \beta_3^2 \nu_{30}^2 + \alpha_3 (\beta\beta_1 \nu_{30} - 1)}, \end{aligned} \quad (6.8)$$

$$G_1 = \frac{\alpha\alpha_1 E_{30}}{2(1 + \beta\beta_1 \nu_{30})}, \quad G_3 = \gamma_3 G_{30}.$$

W ten sposób wyrazimy parametry sprężystości  $C_{ij}$  w zależności od stałych materiałowych, wyliczonych na powierzchni rozpatrywanego ośrodka gruntowego. Zmienność tych parametrów po głębokości warstwy są opisywane poprzez funkcje  $\alpha_1$ ,  $\alpha_3$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_3$ ,  $\gamma_1$  i  $\gamma_3$  zależące od zmiennej  $z$ .

### 6.3 Ogólny model podłoża Vlasova

Rozpatrzmy podłoże sprężyste o miąższości  $H$ , znajdujące się na warstwie nieściśliwej, jak pokazano na rys.2.1 (patrz podrozdział 2.2). Niewiadome przemieszczenia  $u_i = u_i(x_k)$  punktu materialnego  $M(x_k)$  zapiszemy w postaci<sup>64/</sup>

$$u_i = u_i(x_k) = \sum_{s=1}^{n_i} u_{is}(x_\alpha) \psi_{is}(x_3), \quad (6.9)$$

gdzie:  $i, k=1, 2, 3$ ;  $\alpha=1, 2$ ;  $s=1, 2, 3, \dots, n_i$ .

Przestawienie funkcji przemieszczeń w postaci szeregu (6.9) pozwala sprowadzić trójwymiarowe zagadnienie teorii sprężystości do zagadnienia dwuwymiarowego. Funkcje przemieszczeń  $u_{is}(x_\alpha)$ , mające wymiar długości, są nieznane. Funkcje  $\psi_{is}(x_3)$ , charakteryzujące zmienność przemieszczeń po głębokości rozpatrywanej warstwy (funkcje aproksymujące) są bezwymiarowe, liniowo niezależne i przyjmowane w zależności od zachowania rozpatrywanego ośrodka gruntowego pod wpływem obciążeń zewnętrznych. Przemieszczenia (6.9) będziemy uważali za dodatnie, jeżeli ich kierunki będą zgodne z dodatnimi kierunkami osiej  $x_k$ .

Odkształcenia  $\varepsilon_{ij}$  w liniowej teorii sprężystości wyrażają się wzorami

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (6.10)$$

Podstawiając odkształcenia (6.10) do wzorów na naprężenia (6.1), otrzymamy:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= C_{13} \sum_{s=1}^{n_i} u_{3s} \frac{\partial \psi_{3s}}{\partial x_3} + C_{12} \sum_{s=1}^{n_i} \frac{\partial u_{2s}}{\partial x_2} \psi_{2s} + C_{11} \sum_{s=1}^{n_i} \frac{\partial u_{1s}}{\partial x_1} \psi_{1s}, \\ \sigma_{22} &= C_{13} \sum_{s=1}^{n_i} u_{3s} \frac{\partial \psi_{3s}}{\partial x_3} + C_{11} \sum_{s=1}^{n_i} \frac{\partial u_{2s}}{\partial x_2} \psi_{2s} + C_{12} \sum_{s=1}^{n_i} \frac{\partial u_{1s}}{\partial x_1} \psi_{1s}, \\ \sigma_{33} &= C_{33} \sum_{s=1}^{n_i} u_{3s} \frac{\partial \psi_{3s}}{\partial x_3} + C_{13} \sum_{s=1}^{n_i} \frac{\partial u_{2s}}{\partial x_2} \psi_{2s} + C_{13} \sum_{s=1}^{n_i} \frac{\partial u_{1s}}{\partial x_1} \psi_{1s}, \end{aligned} \quad (6.11)$$

<sup>64/</sup> Porównaj ze wzorem (2.1).

$$\begin{aligned}\sigma_{23} &= G_3 \sum_{s=1}^{n_i} \left( u_{2s} \frac{\partial \psi_{2s}}{\partial x_3} + \frac{\partial u_{3s}}{\partial x_2} \psi_{3s} \right), \\ \sigma_{13} &= G_3 \sum_{s=1}^{n_i} \left( u_{1s} \frac{\partial \psi_{1s}}{\partial x_3} + \frac{\partial u_{3s}}{\partial x_1} \psi_{3s} \right), \\ \sigma_{12} &= G_1 \sum_{s=1}^{n_i} \left( \frac{\partial u_{1s}}{\partial x_2} \psi_{1s} + \frac{\partial u_{2s}}{\partial x_1} \psi_{2s} \right),\end{aligned}$$

gdzie:  $u_{is}=u_{is}(x_\alpha)$ ,  $\psi_{is}=\psi_{is}(x_3)$ .

Przy pominięciu sił masowych warunki równowagi

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (6.12)$$

spełniono stosując ortogonalizację Galerkiną, otrzymując skomplikowany układ równań różniczkowych na funkcje przemieszczeń  $u_{is}$  o postaci<sup>65/</sup>:

$$\begin{cases} \sum_{s=1}^{n_1} \left( a_{1s} \frac{\partial^2 u_{1s}}{\partial x_1^2} + a_{2s} \frac{\partial^2 u_{1s}}{\partial x_2^2} + a_{12s} \frac{\partial^2 u_{2s}}{\partial x_1 \partial x_2} + (d_{13s} - d_{31s}) \frac{\partial u_{3s}}{\partial x_1} - b_{1s} u_{1s} \right) + p_1 = 0, \\ \sum_{s=1}^{n_2} \left( a_{3s} \frac{\partial^2 u_{2s}}{\partial x_1^2} + a_{4s} \frac{\partial^2 u_{2s}}{\partial x_2^2} + a_{12s} \frac{\partial^2 u_{1s}}{\partial x_1 \partial x_2} + (d_{23s} - d_{32s}) \frac{\partial u_{3s}}{\partial x_2} - b_{2s} u_{2s} \right) + p_2 = 0, \\ \sum_{s=1}^{n_3} \left( -a_{5s} \nabla^2 u_{3s} + (d_{13s} - d_{31s}) \frac{\partial u_{1s}}{\partial x_1} + (d_{23s} - d_{32s}) \frac{\partial u_{2s}}{\partial x_2} + b_{3s} u_{3s} \right) - p_3 = 0, \end{cases} \quad (6.13)$$

w której:

$$p_1 = -\sigma_{13}(0), \quad p_2 = -\sigma_{23}(0), \quad p_3 = -\sigma_{33}(0), \quad (6.14)$$

a współczynniki występujące w układzie równań różniczkowych (6.13) są zdefiniowane następująco:

$$\begin{aligned}a_{1s} &= \int_0^H C_{11}(x_3) \psi_{1s}^2(x_3) dx_3, & a_{2s} &= \int_0^H G_1(x_3) \psi_{1s}^2(x_3) dx_3, \\ a_{3s} &= \int_0^H G_1(x_3) \psi_{2s}^2(x_3) dx_3, & a_{4s} &= \int_0^H C_{11}(x_3) \psi_{2s}^2(x_3) dx_3, \\ a_{5s} &= \int_0^H G_3(x_3) \psi_{3s}^2(x_3) dx_3, & b_{1s} &= \int_0^H G_3(x_3) [\psi'_{1s}(x_3)]^2 dx_3, \\ b_{2s} &= \int_0^H G_3(x_3) [\psi'_{2s}(x_3)]^2 dx_3, & b_{3s} &= \int_0^H C_{33}(x_3) [\psi'_{3s}(x_3)]^2 dx_3,\end{aligned} \quad (6.15)$$

<sup>65/</sup> W monografii [29], s. 31-34, układ równań doprowadzono do rozwiązania jednego równania różniczkowego o trzech różnych funkcji zanikania przemieszczeń: liniowej, hiperbolicznej i wykładniczej.

$$a_{12s} = \int_0^H [C_{12}(x_3) + G_1(x_3)] \psi_{1s}(x_3) \psi_{2s}(x_3) dx_3 ,$$

$$d_{13s} = \int_0^H C_{13}(x_3) \psi_{1s}(x_3) \psi'_{3s}(x_3) dx_3 ,$$

$$d_{31s} = \int_0^H G_3(x_3) \psi_{3s}(x_3) \psi'_{1s}(x_3) dx_3 ,$$

$$d_{23s} = \int_0^H C_{13}(x_3) \psi_{2s}(x_3) \psi'_{3s}(x_3) dx_3 ,$$

$$d_{32s} = \int_0^H G_3(x_3) \psi_{3s}(x_3) \psi'_{2s}(x_3) dx_3 .$$

Układ równań różniczkowych cząstkowych (6.13) w pełni opisuje pracę niejednorodnego (względem  $x_3$ ), poprzecznie izotropowego podłoża, przy czym podłoże rozpatrywane jest jako warstwa sprężysta o miąższości  $H$ , zdolna przenosić obciążenia normalne oraz styczne, działające na płaszczyznę  $x_3=0$ .

Z punktu widzenia teorii sprężystości, układ równań różniczkowych (6.13) daje przybliżone rozwiązanie dla niejednorodnej, poprzecznie izotropowej warstwy gruntowej, spoczywającej na nieodkształcalnej bazie. Takie rozwiązanie będzie tym bardziej dokładne im więcej przyjmujemy wyrazów  $n_i$  w szeregu (6.9). Warto zauważyć, że zwiększenie liczby wyrazów w szeregu (6.9) wpływa na zwiększenia rzędu układu równań różniczkowych (6.13), co prowadzi do trudności ich rozwiązywania i określenia warunków brzegowych. Zwiększenie dokładności obliczeń można uzyskać również przy mniejszej liczbie wyrazów w szeregu (6.9), przyjmując funkcje zanikania przemieszczeń  $\psi_{is}(x_3)$  uzyskane na podstawie teoretycznych oraz doświadczalnych badań gruntów [29], s. 24.

W zależności od liczby wyrazów  $n_i$  w szeregu (6.9) oraz przyjmowanych funkcji  $\psi_{is}(x_3)$ , będziemy otrzymywali różne modele obliczeniowe podłoża, które bardziej lub mniej dokładnie opisują zachowanie ośrodka gruntowego. Propozycję wyboru tych funkcji przedstawiono w podpunkcie 4.4.

#### **6.4 Zmodyfikowany model podłoża przy założeniu różnych funkcji zanikania w płaszczyźnie $z=const$ oraz wzdłuż osi $z$**

Otrzymany układ równań różniczkowych (6.13) można upraszczać wprowadzając rozmaite założenia, otrzymując tym samym różne modele podłoża. Uproszczenia polegają na założeniu, że niewiadome funkcje przemieszczeń (6.9) można przedstawić

w postaci jednego wyrazu szeregu (6.9), przyjęciu różnych funkcji zanikania przemieszczeń, założeniu, że przemieszczenia poziome są znikomo małe, itd.

W przedstawieniu przemieszczeń w postaci iloczynu dwóch funkcji (6.9), przejdziemy po jednym wyrazie w szeregach ( $n_i=1$ ) dla  $i=1, 2, 3$ . Przemieszczenia  $u_i(x_k)$ , wtedy zapiszemy w postaci

$$u_i(x_k) = u_i(x_\alpha)\psi_i(x_3), \quad (6.16)$$

w której przyjęto dwie różne funkcje zanikania w płaszczyźnie  $x_3=0$  oraz w kierunku prostopadłym do tej płaszczyzny:

$$\psi_1(x_3) = \psi_2(x_3) = \phi(z), \quad \psi_3(x_3) = \psi(z). \quad (6.17)$$

Przedstawienie przemieszczeń w postaci (6.16) oznacza sprowadzenie modelu podłoża do jednego stopnia swobody w kierunku osi  $z$  przy zachowaniu nieskończonej liczby stopni swobody w płaszczyźnie  $z=const$ . Taki układ można nazwać *dyskretnie – kontinualnym*<sup>66/</sup>. Funkcje  $u_i(x_\alpha)$ , mające wymiar jednostek długości, są poszukiwane, natomiast funkcje  $\phi(z)$  i  $\psi(z)$ , charakteryzujące rozkład przemieszczeń po głębokości rozpatrywanej warstwy, są bezwymiarowe i przyjmowane zgodnie z rozpatrywanym zagadnieniem (w przypadku warstwy spoczywającej na podłożu nieściśliwym te funkcje muszą spełniać warunki (4.27)).

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned} u_1 = u &= u(x_\alpha)\phi(x_3) = u(x, y)\phi(z), \\ u_2 = v &= v(x_\alpha)\phi(x_3) = v(x, y)\phi(z), \\ u_3 = w &= w(x_\alpha)\psi(x_3) = w(x, y)\psi(z). \end{aligned} \quad (6.18)$$

Układ równań przemieszczeniowych (6.13), przy oznaczeniach (6.18), zapiszemy następująco:

$$\begin{cases} a_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (a_{12} + a_2) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + (d_{13} - d_{31}) \frac{\partial w}{\partial x} - b_1 u + p_1 = 0, \\ a_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + a_1 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (a_{12} + a_2) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (d_{13} - d_{31}) \frac{\partial w}{\partial y} - b_1 v + p_2 = 0, \\ -a_3 \nabla^2 w + (d_{13} - d_{31}) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + b_3 w - p_3 = 0, \end{cases} \quad (6.19)$$

gdzie

<sup>66/</sup> Przy ograniczonej liczbie wyrazów  $n_i$  w przemieszczeniach (6.9), sprowadzamy trójwymiarowe zagadnienie teorii sprężystości do układu o  $n_i$  stopni swobody w kierunku prostopadłym do płaszczyzny  $z=const$  z zachowaniem nieskończonej liczby stopni swobody w płaszczyźnie  $z=const$  [29], s. 16.



$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (6.20)$$

Wprowadzając operatory  $L_{ij}$ :

$$\begin{aligned} L_{11} &= a_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + a_2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} - b_1, & L_{22} &= a_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + a_1 \frac{\partial^2}{\partial y^2} - b_1, \\ L_{33} &= b_3 - a_3 \nabla^2, & L_{12} &= L_{21} = a_{12} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \\ L_{13} &= L_{31} = (d_{13} - d_{31}) \frac{\partial}{\partial x}, & L_{23} &= L_{32} = (d_{13} - d_{31}) \frac{\partial}{\partial y}, \end{aligned} \quad (6.21)$$

powyższy układ równań (6.19) można zapisać w postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ -p_3 \end{bmatrix} = 0. \quad (6.22)$$

Charakterystyki materiałowe  $C_{ij}=C_{ij}(z)$  oraz  $G_i=G_i(z)$ , występujące we współczynnikach całkowych (6.15), zdefiniowane są wzorami (6.8). Natomiast parametry całkowe, występujące w operatorach (6.21), zdefiniowane są następująco (porównaj (6.15)):

$$\begin{aligned} a_1 &= \int_0^H C_{11}(z) \phi^2(z) dz, & a_2 &= \int_0^H G_1(z) \phi^2(z) dz, \\ a_3 &= \int_0^H G_3(z) \psi^2(z) dz, & a_{12} &= \int_0^H C_{12}(z) \phi^2(z) dz, \\ b_1 &= \int_0^H G_3(z) [\phi'(z)]^2 dz, & b_2 &= \int_0^H C_{33}(z) [\psi'(z)]^2 dz, \\ d_{13} &= \int_0^H C_{13}(z) \phi(z) \psi'(z) dz, & d_{31} &= \int_0^H G_3(z) \psi(z) \phi'(z) dz. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Zauważmy, że  $a_1, a_2, a_3, a_{12}$ , mają wymiar  $Nm^{-1}$ ,  $d_{13}, d_{31} - Nm^{-2}$ , a  $b_1, b_2$  zaś  $-Nm^{-3}$ .

Przy pominięciu obciążeń stycznych  $p_1$  i  $p_2$  w płaszczyźnie  $z=0$ , rozwiązanie układu równań (6.19) można sprowadzić, stosując metodę operatorową, do postaci trzech niezależnych równań różniczkowych cząstkowych szóstego rzędu na poszukiwane funkcje przemieszczeń.

Ostatecznie, równania zmodyfikowanego modelu podłoża Vlasova zapiszemy w następującej postaci:

$$\begin{aligned}
k_3 \nabla^6 u - k_2 \nabla^2 u + k_1 \nabla^2 u - k_0 u &= \frac{\partial}{\partial x} B p_3, \\
k_3 \nabla^6 v - k_2 \nabla^2 v + k_1 \nabla^2 v - k_0 v &= \frac{\partial}{\partial y} B p_3, \\
k_3 \nabla^6 w - k_2 \nabla^2 w + k_1 \nabla^2 w - k_0 w &= M p_3,
\end{aligned} \tag{6.24}$$

w której:

$$\begin{aligned}
k_0 &= b_1^2 b_2, \quad k_3 = \frac{a_1 a_3 (a_1 - a_{12})}{2} \\
k_1 &= \frac{b_1 (2a_3 b_1 + (3a_1 - a_{12}) b_2 - 2(d_{13} - d_{31})^2)}{2}, \\
k_2 &= \frac{2a_1 a_3 b_1 + a_3 (a_1 - a_{12}) b_1 + a_1 (a_1 - a_{12}) b_2 - (a_1 - a_{12}) (d_{13} - d_{31})^2}{2}, \\
\nabla^4 &= \nabla^2 \nabla^2, \quad \nabla^6 = \nabla^4 \nabla^2 = \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2.
\end{aligned} \tag{6.25}$$

Operatory B i M, występujące w równaniach (6.24), zdefiniowane są następująco:

$$\begin{aligned}
B &= -\frac{(a_1 - a_{12})(d_{13} - d_{31})}{2} \nabla^2 + b_1 (d_{13} - d_{31}), \\
M &= \frac{a_1^2 - a_1 a_{12}}{2} \nabla^4 + \frac{a_{12} b_1 - 3a_1 b_1}{2} \nabla^4 + b_1^2.
\end{aligned} \tag{6.26}$$

Równania różniczkowe (6.24) opisują zależność pomiędzy przemieszczeniami  $u$ ,  $v$  i  $w$  a obciążeniem zewnętrznym  $p_3$  dla niejednorodnej względem osi  $z$  i poprzecznie izotropowej warstwy gruntowej o miąższości  $H$ , przy założeniu przemieszczeń w postaci (6.16).

Równania (6.24) można traktować jako czteroparametrowy model podłoża sprężystego o parametrach całkowych  $k_0$ ,  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$ .

Uogólnione siły podłużne  $N_i(x,y)$  oraz poprzeczne  $T_i(x,y)$  wyznaczmy ze wzorów:

$$\begin{aligned}
N_1(x,y) &= \int_0^H \sigma_{11} \psi(z) dz, \quad N_2(x,y) = \int_0^H \sigma_{22} \psi(z) dz, \\
N_3(x,y) &= \int_0^H \sigma_{33} \psi(z) dz, \quad T_1(x_1, x_2) = \int_0^H \sigma_{12} \psi(z) dz, \\
T_2(x_1, x_2) &= \int_0^H \sigma_{23} \psi(z) dz, \quad T_3(x_1, x_2) = \int_0^H \sigma_{13} \psi(z) dz.
\end{aligned} \tag{6.27}$$

Wyrażając naprężenia  $\sigma_{ij}$  poprzez przemieszczenia (6.18) oraz uwzględniając zależności (6.23), otrzymamy:

$$\begin{aligned} N_1(x, y) &= a_1 \frac{\partial u}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial v}{\partial y} + d_{13} w, & N_2(x, y) &= a_{12} \frac{\partial u}{\partial x} + a_1 \frac{\partial v}{\partial y} + d_{13} w, \\ N_3(x, y) &= a_{13} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + d_3 w, & T_1(x_1, x_2) &= a_2 \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \\ T_2(x_1, x_2) &= a_5 \frac{\partial w}{\partial y} + d_{31} v, & T_3(x_1, x_2) &= a_5 \frac{\partial w}{\partial x} + d_{31} u, \end{aligned} \quad (6.28)$$

gdzie:

$$a_{13} = \int_0^H C_{13}(z) \psi^2(z) dz, \quad d_3 = \int_0^H C_{33}(z) \psi(z) \psi'(z) dz. \quad (6.29)$$

## 6.5 Inne zmodyfikowane modele podłoża

Jak wspomniano w podpunkcie (6.4), wprowadzając różne założenia, będziemy otrzymywali różne uproszczone modele podłoża sprężystego. Wprowadzenie niektórych uproszczeń charakteryzuje się tym, że postaci równań różniczkowych (6.24) nie ulegają zmianie. Natomiast zmianie ulegają jedynie parametry całkowe (6.23).

Przy następujących uproszczeniach otrzymujemy:

1) w przypadku stałych materiałowych niezależnych od zmiennej  $z$  oraz przemieszczeń przyjętych w postaci (6.18), parametry całkowe (6.23) wyznaczamy ze wzorów:

$$\begin{aligned} a_1 &= C_{11} \int_0^H \phi^2(z) dz, & a_2 &= G_1 \int_0^H \phi^2(z) dz, \\ a_5 &= G_3 \int_0^H \psi^2(z) dz, & a_{12} &= C_{12} \int_0^H \phi^2(z) dz, \\ b_1 &= G_3 \int_0^H [\phi'(z)]^2 dz, & b_3 &= C_{33} \int_0^H [\psi'(z)]^2 dz, \\ d_{13} &= C_{13} \int_0^H \phi(z) \psi'(z) dz, & d_{31} &= G_3 \int_0^H \psi(z) \phi'(z) dz. \end{aligned} \quad (6.30)$$

w których:

$$\begin{aligned}
C_{11} &= \frac{\alpha E_{30} (\alpha v_{30}^2 - 1)}{(1 + \beta v_{30})(v_{30}(\beta + 2\alpha v_{30}) - 1)}, \\
C_{12} &= -\frac{\alpha E_{30} v_{30} (\beta + \alpha v_{30})}{(1 + \beta v_{30})(v_{30}(\beta + 2\alpha v_{30}) - 1)}, \quad C_{13} = -\frac{\alpha E_{30} v_{30}}{v_{30}(\beta + 2\alpha v_{30}) - 1}, \\
C_{33} &= \frac{E_{30} (\beta v_{30} - 1)}{v_{30}(\beta + 2\alpha v_{30}) - 1}, \quad G_1 = \frac{\alpha E_{30}}{2(1 + \beta v_{30})}, \quad G_3 = G_{30};
\end{aligned} \tag{6.31}$$

2) w przypadku stałych materiałowych zależnych od zmiennej  $z$  oraz przemieszczeń przyjętych w postaci:

$$\begin{aligned}
u_1 &= u = u(x_\alpha) \psi(x_3) = u(x, y) \psi(z), \\
u_2 &= v = v(x_\alpha) \psi(x_3) = v(x, y) \psi(z), \\
u_3 &= w = w(x_\alpha) \psi(x_3) = w(x, y) \psi(z),
\end{aligned} \tag{6.32}$$

parametry całkowe (6.23) są zdefiniowane wzorami:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \int_0^H C_{11}(z) \psi^2(z) dz, \quad a_2 = \int_0^H G_1(z) \psi^2(z) dz, \\
a_5 &= \int_0^H G_3(z) \psi^2(z) dz, \quad a_{12} = \int_0^H C_{12}(z) \psi^2(z) dz, \\
b_1 &= \int_0^H G_3(z) [\psi'(z)]^2 dz, \quad b_3 = \int_0^H C_{33}(z) [\psi'(z)]^2 dz, \\
d_{13} &= \int_0^H C_{13}(z) \psi(z) \psi'(z) dz, \quad d_{31} = \int_0^H G_3(z) \psi(z) \psi'(z) dz,
\end{aligned} \tag{6.33}$$

gdzie  $C_{ij}(z)$  oraz  $G_1(z)$  i  $G_3(z)$  podano wzorami (6.8);

3) w przypadku stałych materiałowych niezależnych od zmiennej  $z$  oraz przemieszczeń przyjętych w (6.32), parametry całkowe (6.23) zapiszemy następująco:

$$\begin{aligned}
a_1 &= C_{11} \int_0^H \psi^2(z) dz, \quad a_2 = G_1 \int_0^H \psi^2(z) dz, \\
a_5 &= G_3 \int_0^H \psi^2(z) dz, \quad a_{12} = C_{12} \int_0^H \psi^2(z) dz, \\
b_1 &= G_3 \int_0^H [\psi'(z)]^2 dz, \quad b_3 = C_{33} \int_0^H [\psi'(z)]^2 dz, \\
d_{13} &= C_{13} \int_0^H \psi(z) \psi'(z) dz, \quad d_{31} = G_3 \int_0^H \psi(z) \psi'(z) dz,
\end{aligned} \tag{6.34}$$

gdzie stałe materiałowe  $C_{ij}$  oraz  $G_1$  i  $G_3$  są zdefiniowane wzorami (6.31).

Przy przyjętych powyżej założeniach, będziemy otrzymywali trójwymiarowe modele podłoża sprężystego o postaci (6.24) w których zmianie ulegają jedynie parametry całkowe (6.23).

## 6.6 Dwuparametrowy zmodyfikowany model podłoża Vlasova

W monografii [29], s. 55, przedstawiono przestrzenny model podłoża, który Vlasov i Leontiev nazwali modelem podłoża sprężystego o dwóch parametrach. W tym podpunkcie przedstawimy analogiczny model zmodyfikowanego podłoża o dwóch parametrach całkowych  $k_1$  i  $k_2$ .

Przemieszczenia przyjmujemy w postaci:

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = w = w(x, y)\psi(z). \quad (6.35)$$

Układ równań (6.19) będzie składał się tylko z jednego równania (6.19)<sub>3</sub>, które po uproszczeniach zapiszemy następująco

$$k_2 \nabla^2 w - k_1 w = -p_3, \quad (6.36)$$

gdzie:

$$k_1 = \int_0^H C_{33}(z) [\psi'(z)]^2 dz, \quad k_2 = \int_0^H G_3(z) \psi^2(z) dz. \quad (6.37)$$

Otrzymany zmodyfikowany model podłoża (6.36) różni się od modelu Vlasova (2.8) tym, że charakterystyki materiałowe  $C_{33}$  i  $G_3$  są funkcjami zmiennej  $z$ . W celu wyznaczenia parametrów całkowych (6.37) należy przyjąć funkcję zanikania przemieszczeń  $\psi(z)$ . Zakładając, że charakterystyki materiałowe są niezależne od zmiennej  $z$ , otrzymamy model podłoża Vlasova (2.8). Zmodyfikowany model (6.36), jak to pokazano poniżej, w odróżnieniu od modelu Vlasova, pozwala także na rozpatrywanie układu warstw o zmiennej sztywności po głębokości warstwy (skokowo lub w sposób ciągły). Żeby rozpatrywać taki układ warstw, trzeba opisać zmianę charakterystyk materiałowych po głębokości warstwy (patrz podpunkt 7.4).

## 6.7 Osiosymetryczny model zmodyfikowanego podłoża Vlasova

W przypadku ciał obciążonych osiosymetrycznie, wektor przemieszczeń wyraża się następująco

$$u \equiv u(u_r, 0, u_z). \quad (6.38)$$

Przemieszczenie  $u_r$  i  $u_z$  przyjmiemy w postaci:

$$u_r = u(r)\phi(z), \quad u_z = w(r)\psi(z). \quad (6.39)$$

Zakładając, że rozpatrywany ośrodek gruntowy jest niejednorodny oraz poprzecznie izotropowy, naprężenia  $\sigma_{ij}$ , wyrażone poprzez przemieszczenia (6.39), zapiszemy następująco:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= C_{11}\phi \frac{\partial u}{\partial r} + C_{12}\phi \frac{u}{r} + C_{13}w \frac{\partial \psi}{\partial z}, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= C_{11}\phi \frac{u}{r} + C_{12}\phi \frac{\partial u}{\partial r} + C_{13}w \frac{\partial \psi}{\partial z}, \\ \sigma_{zz} &= C_{33}w \frac{\partial \psi}{\partial z} + C_{13}\phi \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right), \\ \sigma_{rz} &= C_{44}\psi \frac{\partial w}{\partial r} + C_{44}u \frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad \sigma_{r\varphi} = 0, \quad \sigma_{z\varphi} = 0. \end{aligned} \quad (6.40)$$

Równania równowagi (6.12) spełniono, stosując ortogonalizację Galerkina, otrzymując następujący układ równań różniczkowych na poszukiwane funkcje przemieszczeń  $u$  i  $w$ :

$$\begin{cases} a_1 \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} - \frac{b_1}{a_1} \right) u + (d_{13} - d_{31}) \frac{dw}{dr} + p_1 = 0, \\ a_2 \left( \frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{b_2}{a_2} \right) w + (d_{13} - d_{31}) \left( \frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) u - p_3 = 0, \end{cases} \quad (6.41)$$

w którym parametry całkowe są zdefiniowane następująco:

$$\begin{aligned} a_1 &= \int_0^H C_{11}(z)\phi^2(z)dz, \quad a_2 = \int_0^H G_3(z)\psi^2(z)dz, \\ b_1 &= \int_0^H G_3(z)[\phi'(z)]^2 dz, \quad b_2 = \int_0^H C_{33}(z)[\psi'(z)]^2 dz, \\ d_{13} &= \int_0^H C_{13}(z)\phi(z)\psi'(z)dz, \quad d_{31} = \int_0^H G_3(z)\psi(z)\phi'(z)dz, \end{aligned} \quad (6.42)$$

a charakterystyki materiałowe  $C_{11}$ ,  $C_{33}$ ,  $C_{13}$ ,  $G_3$  wyrażają się wzorami (6.8).

Układ równań (6.41) można zapisać w postaci operatorowej

$$\begin{cases} a_1 L_{11}u + L_{12}w + p_1 = 0, \\ L_{21}u + L_{22}w - p_3 = 0, \end{cases} \quad (6.43)$$

gdzie operatory  $L_{11}$ ,  $L_{12}$ ,  $L_{21}$  i  $L_{22}$  zdefiniowano następująco:

$$L_{11} = a_1 \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} - \frac{b_1}{a_1} \right), \quad L_{12} = (d_{13} - d_{31}) \frac{d}{dr},$$

$$L_{21} = (d_{13} - d_{31}) \left( \frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right), \quad L_{22} = a_2 \left( \frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{b_2}{a_2} \right).$$
(6.44)

W tym przypadku, ze względu na to, że operatory (6.44) nie są przemienne, nie możemy skorzystać z metody operatorowej w celu rozseparowania układu (6.41). Jest to możliwe kosztem zawyżenia rzędu równania na funkcję  $w(r)$ .

W przypadku ośrodka jednorodnego (charakterystyki materiałowe nie zależą od zmiennej  $z$ ), postać układu równań różniczkowych (6.41) nie zmienia się.

Uogólnione siły podłużne i poprzeczne, występujące w podłożu sprężystym, zdefiniujemy następująco<sup>67/</sup>:

$$T(r) = \int_0^H \sigma_{rr} \psi(z) dz = \frac{a_{12}}{r} u(r) + a_{13} w(r) + a_{21} u'(r),$$
(6.45)

$$S(r) = \int_0^H \sigma_{rz} \psi(z) dz = d_{31} u(r) + a_2 w'(r),$$

gdzie:

$$a_{12} = \int_0^H C_{12}(z) \phi(z) \psi(z) dz, \quad a_{21} = \int_0^H C_{11}(z) \phi(z) \psi(z) dz,$$

$$a_{13} = \int_0^H C_{13}(z) \psi(z) \psi'(z) dz.$$
(6.46)

Zauważmy, że w przypadku, kiedy  $d_{13} = d_{31}$ , układ równań różniczkowych (6.41) rozseparowuje się na dwa niezależne równania drugiego rzędu o postaci<sup>68/</sup>:

$$a_1 \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} - \frac{b_1}{a_1} \right) u + p_1 = 0,$$

$$a_2 \left( \frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{b_2}{a_2} \right) w - p_3 = 0.$$
(6.47)

Podsumowując, ogólny model podłoża sprężystego (6.24), otrzymany przy założeniu, że wektor przemieszczeń ma wszystkie składowe różne od zera, oraz zakładając w ogólnym przypadku, że podłoże jest niejednorodne i poprzecznie izotropowe, jest opisany odpowiednio równaniami (6.24) i (6.41). Wprowadzając założenia, że ośrodek jest

<sup>67/</sup> Uogólnione siły wewnętrzne zdefiniowano analogicznie jak w monografii [29].

<sup>68/</sup> Taki przypadek występuje wtedy, gdy rozpatrujemy jednorodną warstwę izotropową, zakładając, że  $\nu = 1/4$  (przypadek  $\lambda = \mu$ ).

jednorodny i izotropowy oraz wektor przemieszczenia ma niezerową tylko składową pionową, z układu równań różniczkowych (6.19) i (6.41) otrzymamy równania modelu Vlasova.

Zawyżenie rzędu równania różniczkowego na poszukiwane przemieszczenia doprowadza do trudności uzyskania analitycznego rozwiązania zagadnienia obrotowo-symetrycznego. Jednak w takim przypadku można uzyskać rozwiązanie metodami numerycznymi.



## 7. WERYFIKACJA ZMODYFIKOWANEGO MODELU PODŁOŻA

### 7.1 Cel rozdziału

W tym rozdziale wykonano weryfikację zmodyfikowanego modelu podłoża sprężystego. W tym przypadku, jak i w Rozdziale 5, jako benchmark przyjęto rozwiązanie ścisłe teorii sprężystości, które porównano z wynikami uzyskanymi według zmodyfikowanego modelu dla warstwy poddanej równomiernemu obciążeniu w kształcie koła oraz kwadratu. W celu aproksymacji przemieszczeń po głębokości warstwy zastosowano funkcje zanikania, przedstawione w podpunkcie 4.4.

### 7.2 Jednorodna i izotropowa warstwa gruntowa

Porównanie zmodyfikowanego modelu podłoża oraz modelu Vlasova, a także rozwiązań ścisłych teorii sprężystości przedstawimy dla zagadnień przedstawionych w podpunktach 3.2.3 i 3.3.2.

#### 7.2.1 Obciążenie w kształcie prostokąta

W podpunkcie 5.3 przedstawiono zagadnienie obciążenia warstwy w kształcie prostokąta według modelu podłoża Vlasova. Niżej podamy rozwiązanie analogicznego przypadku obciążenia warstwy według zmodyfikowanego modelu podłoża, przyjmując, że parametry materiałowe są niezależne od zmiennej  $z$ .

Przemieszczenia dane są wzorami (patrz podrozdział 6.5):

$$\begin{aligned}u &= u(x_\alpha)\psi(x_3) = u(x, y)\psi(z), \\v &= v(x_\alpha)\psi(x_3) = v(x, y)\psi(z), \\w &= w(x_\alpha)\psi(x_3) = w(x, y)\psi(z).\end{aligned}\tag{7.1}$$

Dla jednorodnego ośrodka izotropowego stałe materiałowe zapiszemy następująco (patrz Załącznik 2, pkt.7):

$$C_{11} = C_{33} = \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad C_{12} = C_{13} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}.\tag{7.2}$$

Układ równań przemieszczeniowych, przy pominięciu obciążeń stycznych do płaszczyzny  $z=0$ , zapiszemy w postaci

$$\begin{cases} a_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a_{12} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + (d_{13} - d_{31}) \frac{\partial w}{\partial x} - b_1 u = 0, \\ a_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + a_1 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + a_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (d_{13} - d_{31}) \frac{\partial w}{\partial y} - b_1 v = 0, \\ -a_5 \nabla^2 w + (d_{13} - d_{31}) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + b_3 w - p_3 = 0, \end{cases} \quad (7.3)$$

w której parametry całkowe, występujące w równaniu (7.3) są podane wzorami (porównaj wzory (6.34)):

$$\begin{aligned} a_1 &= C_{11} \int_0^H \psi^2(z) dz, & a_2 &= G_1 \int_0^H \psi^2(z) dz, \\ a_5 &= G_3 \int_0^H \psi^2(z) dz, & a_{12} &= (C_{12} + G_1) \int_0^H \psi^2(z) dz, \\ b_1 &= G_3 \int_0^H [\psi'(z)]^2 dz, & b_3 &= C_{33} \int_0^H [\psi'(z)]^2 dx_3, \\ d_{13} &= C_{13} \int_0^H \psi(z) \psi'(z) dz, & d_{31} &= G_3 \int_0^H \psi(z) \psi'(z) dz. \end{aligned} \quad (7.4)$$

W tym przypadku pójdziemy nieco inną drogą niż zaproponowana w podpunkcie 6.4, gdzie układ równań przemieszczeniowych metodą operatorową doprowadziliśmy do trzech niezależnych równań na poszukiwane przemieszczenia (6.24). Natomiast do układu (7.3) zastosujemy ogólną transformatę całkową Fouriera, zdefiniowaną wzorem

$$\tilde{f}(s, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{i(sx+ty)} dx dy, \quad (7.5)$$

i jej odwrotność

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(s, t) e^{-i(sx+ty)} ds dt. \quad (7.6)$$

W wyniku układu równań (7.3), w przestrzeni transformat  $s$  i  $t$ , zapiszemy następująco

$$\begin{cases} -(s^2 a_1 + t^2 a_2 + b_1) \tilde{u} - a_{12} s t \tilde{v} - i(d_{13} - d_{31}) s \tilde{w} = 0, \\ -(s^2 a_2 + t^2 a_1 + b_1) \tilde{v} - a_{12} s t \tilde{u} - i(d_{13} - d_{31}) t \tilde{w} = 0, \\ \left[ (s^2 + t^2) a_5 + b_3 \right] \tilde{w} - i(d_{13} - d_{31}) (s \tilde{u} + t \tilde{v}) - \tilde{p}_3 = 0. \end{cases} \quad (7.7)$$

Rozwiązanie układu równań algebraicznych (7.7) zapiszemy w postaci:

$$\tilde{u} = -\frac{2pi \tilde{f}_{u_1}}{\pi t (\tilde{f}_{u_2} + \tilde{f}_{u_3})}, \quad \tilde{v} = -\frac{2pi \tilde{f}_{v_1}}{\pi s (\tilde{f}_{v_2} + \tilde{f}_{v_3} + \tilde{f}_{v_4})}, \quad \tilde{w} = \frac{2p \tilde{f}_{w_1}}{\pi s t (\tilde{f}_{w_2} + \tilde{f}_{w_3} + \tilde{f}_{w_4})}, \quad (7.8)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{u_1} &= (d_{13} - d_{31}) [a_2 s^2 + (a_1 - a_{12}) t^2 + b_1] \sin(as) \sin(bt), \\ \tilde{f}_{u_2} &= t^2 [(a_1 - a_{12}) s^2 + a_2 t^2 + b_1] [a_{12} (a_5 (s^2 + t^2) + b_3) - (d_{13} - d_{31})^2], \\ \tilde{f}_{u_3} &= [a_2 s^2 + (a_1 - a_{12}) t^2 + b_1] [(a_1 s^2 + a_2 t^2 + b_1) (a_5 (s^2 + t^2) + b_3) - (d_{13} - d_{31})^2 s^2], \\ \tilde{f}_{v_1} &= (d_{13} - d_{31}) [(a_1 - a_{12}) s^2 + a_2 t^2 + b_1] \sin(as) \sin(bt), \\ \tilde{f}_{v_2} &= t^4 [a_2 (a_5 b_1 - (d_{13} - d_{31})^2) + a_1 (a_2 (a_5 s^2 + b_3) + a_5 b_1) + a_5 a_1^2 s^2 - a_5 a_{12}^2 s^2 + a_2^2 a_5 s^2], \\ \tilde{f}_{v_3} &= s^2 t^2 b_1 [a_5 b_1 + (a_1 + a_2) b_3 - (d_{13} - d_{31})^2] + a_5 (a_1^2 + a_2 a_1 + a_2^2 - a_{12}^2) s^4 + \\ & s^2 t^2 [2a_1 (a_5 b_1 - (d_{13} - d_{31})^2) + a_{12} (2(d_{13} - d_{31})^2 - a_{12} b_3) + a_1^2 b_3 + 2a_2 a_5 b_1 + a_2^2 b_3], \\ \tilde{f}_{v_4} &= (a_2 s^2 + b_1) [s^2 (a_5 b_1 + a_1 b_3 - (d_{13} - d_{31})^2) + a_1 a_5 s^4 + b_1 b_3] + a_1 a_2 a_5 t^6, \\ \tilde{f}_{w_1} &= [(a_1 + a_2) b_1 (s^2 + t^2) + a_1 a_2 s^4 + (a_1^2 + a_2^2 - a_{12}^2) s^2 t^2 + a_1 a_2 t^4 + b_1^2] \sin(as) \sin(bt), \\ \tilde{f}_{w_2} &= t^4 [a_2 (a_5 b_1 - (d_{13} - d_{31})^2) + a_1 (a_2 (a_5 s^2 + b_3) + a_5 b_1) + a_5 a_1^2 s^2 - a_5 a_{12}^2 s^2 + a_2^2 a_5 s^2], \\ \tilde{f}_{w_3} &= t^2 b_1 [a_5 b_1 + (a_1 + a_2) b_3 - (d_{13} - d_{31})^2] + a_5 (a_1^2 + a_2 a_1 + a_2^2 - a_{12}^2) s^4 + \\ & t^2 s^2 [2a_1 (a_5 b_1 - (d_{13} - d_{31})^2) + a_{12} (2(d_{13} - d_{31})^2 - a_{12} b_3) + a_1^2 b_3 + 2a_2 a_5 b_1 + a_2^2 b_3], \\ \tilde{f}_{w_4} &= (a_2 s^2 + b_1) [s^2 (a_5 b_1 + a_1 b_3 - (d_{13} - d_{31})^2) + a_1 a_5 s^4 + b_1 b_3] + a_1 a_2 a_5 t^6. \end{aligned}$$

W celu wyznaczenia współczynników całkowych (7.4) należy zadać funkcję zanikania przemieszczeń  $\psi(z)$ . Wprowadzając układ współrzędnych bezwymiarowych

$$x = \xi a, \quad y = \eta b, \quad z = \zeta a, \quad s = \frac{\sigma}{a}, \quad t = \frac{\tau}{b}, \quad \lambda = \frac{H}{a}, \quad b = \kappa a, \quad (7.9)$$

poniżej zapiszemy wyrażenia na transformaty przemieszczeń warstwy obciążonej na kwadracie dla funkcji zanikania  $\psi(z)$  przyjętej w postaci (4.26)<sub>1,2</sub> i (4.29).

W przypadku  $\psi(z)$  przyjętej w postaci liniowej funkcji (4.26)<sub>1</sub>, otrzymujemy:

1) dla  $\nu=0$

$$\begin{aligned}\tilde{u} &= -\frac{72ia^3 p \lambda^2 \sin(\sigma) \sin(\tau)}{\pi E \tau \left[ \lambda^2 (\sigma^2 + \tau^2) (8\lambda^2 (\sigma^2 + \tau^2) + 51) + 72 \right]}, \\ \tilde{v} &= -\frac{72ia^3 p \lambda^2 \sin(\sigma) \sin(\tau)}{\pi E \sigma \left[ \lambda^2 (\sigma^2 + \tau^2) (8\lambda^2 (\sigma^2 + \tau^2) + 51) + 72 \right]}, \\ \tilde{w} &= \frac{48a^3 p \lambda \sin(\sigma) \sin(\tau) (2\lambda^2 (\sigma^2 + \tau^2) + 3)}{\pi E \sigma \tau \left[ \lambda^2 (\sigma^2 + \tau^2) (8\lambda^2 (\sigma^2 + \tau^2) + 51) + 72 \right]};\end{aligned}\quad (7.10)$$

2) dla  $\nu=1/4$

$$\tilde{u} = 0, \quad \tilde{v} = 0, \quad \tilde{w} = \frac{15a^3 p \lambda \sin(\sigma) \sin(\tau)}{\pi E \sigma \tau (\lambda^2 (\sigma^2 + \tau^2) + 9)}.\quad (7.11)$$

W przypadku  $\psi(z)$  przyjętej w postaci hiperbolicznej funkcji (4.26)<sub>2</sub>, transformaty przemieszczeń zapiszemy następująco:

1) dla  $\nu=0$

$$\tilde{u} = -\frac{8a^3 p \tilde{f}_1}{8E\pi\tau(\tilde{f}_2 + \tilde{f}_3)}, \quad \tilde{v} = -\frac{8a^3 p \tilde{f}_1}{\pi E \sigma (\tilde{f}_2 + \tilde{f}_3)}, \quad \tilde{w} = -\frac{8a^3 p \tilde{g}_1}{\pi E \sigma \tau (\tilde{g}_2 + \tilde{g}_3)},\quad (7.12)$$

gdzie:

$$\begin{aligned}\tilde{f}_1 &= i e^{-i(\xi\sigma + \eta\tau)} \sin(\sigma) \sin(\tau), \\ \tilde{f}_2 &= -\left[ (2 + \sigma^2 + \tau^2)(1 + 2(\sigma^2 + \tau^2)) + 4\lambda(1 - (\sigma^2 + \tau^2)^2) \coth(\lambda) \right] \operatorname{csch}^2(\lambda), \\ \tilde{f}_3 &= -2(1 + \sigma^2 + \tau^2)^2 - \lambda^2(2 - (\sigma^2 + \tau^2))(1 - 2(\sigma^2 + \tau^2)) \operatorname{csch}^4(\lambda), \\ \tilde{g}_1 &= \frac{\operatorname{csch}^2(\lambda)}{2} \left[ 2\lambda(1 - 2(\sigma^2 + \tau^2)) + (1 + 2(\sigma^2 + \tau^2)) \sinh(2\lambda) \right] \sin(\sigma) \sin(\tau), \\ \tilde{g}_2 &= -\left[ (2 + \sigma^2 + \tau^2)(1 + 2(\sigma^2 + \tau^2)) + 4\lambda(1 - (\sigma^2 + \tau^2)^2) \coth(\lambda) \right] \operatorname{csch}^2(\lambda), \\ \tilde{g}_3 &= -2(1 + \sigma^2 + \tau^2)^2 - \lambda^2 \left[ 2 - (\sigma^2 + \tau^2) \right] \left[ 1 - 2(\sigma^2 + \tau^2) \right] \operatorname{csch}^4(\lambda);\end{aligned}\quad (7.13)$$

2) dla  $\nu=1/4$

$$\begin{aligned}\tilde{u} &= 0, \quad \tilde{v} = 0, \\ \tilde{w} &= \frac{10a^3 p \sin(\sigma) \sin(\tau)}{\pi E \sigma \tau \left[ (\sigma^2 + \tau^2 + 3) \coth(\lambda) - \lambda(\sigma^2 + \tau^2 - 3) \operatorname{csch}^2(\lambda) \right]}.\end{aligned}\quad (7.14)$$

W przypadku  $\psi(z)$  przyjętej w postaci (4.29), w celu wyznaczenia parametrów całkowych (7.4) należy stosować całkowanie numeryczne. Transformaty przemieszczeń zapiszemy następująco:

1) dla  $\nu=0$  oraz  $\lambda=1$

$$\begin{aligned}\tilde{u} &= -\frac{3,37i a^3 p e^{-i(\xi\sigma+\eta\tau)} (3,29+\sigma^2+\tau^2) \sin(\sigma) \sin(\tau)}{E\tau \left[ \sigma^6 + \tau^6 + 35,59 + 33,52\tau^2 + 10,19\tau^4 + \sigma^4 (10,19+3\tau^2) + \sigma^2 (33,52+20,38\tau^2+3\tau^4) \right]}, \\ \tilde{v} &= -\frac{3,37i a^3 p e^{-i(\xi\sigma+\eta\tau)} (3,29+\sigma^2+\tau^2) \sin(\sigma) \sin(\tau)}{E\sigma \left[ \sigma^6 + \tau^6 + 35,59 + 33,57\tau^2 + 10,19\tau^4 + \sigma^4 (10,19+3\tau^2) + \sigma^2 (33,52+20,38\tau^2+3\tau^4) \right]}, \\ \tilde{w} &= \frac{a^3 p e^{-i(\xi\sigma+\eta\tau)} \left[ 22,41+4,14\sigma^4 + 20,44\tau^2 + 4,143\tau^4 + \sigma^2 (20,44+8,28\tau^2) \right] \sin(\sigma) \sin(\tau)}{E\sigma\tau \left[ 35,59 + \sigma^6 + \tau^6 + 33,52\tau^2 + 10,19\tau^4 + \sigma^4 (10,19+3\tau^2) + \sigma^2 (33,52+20,38\tau^2+3\tau^4) \right]};\end{aligned}\quad (7.15)$$

2) dla  $\nu=0$  oraz  $\lambda=5$

$$\begin{aligned}\tilde{u} &= -\frac{0,55i a^3 p e^{-i(\xi\sigma+\eta\tau)} (0,44+\sigma^2+\tau^2) \sin(\sigma) \sin(\tau)}{E\tau \left[ 0,08+\sigma^6 + \tau^6 + 0,58\tau^2 + 1,32\tau^4 + \sigma^4 (1,32+3\tau^2) + \sigma^2 (0,58+2,64\tau^2+3\tau^4) \right]}, \\ \tilde{v} &= -\frac{0,55i a^3 p e^{-i(\xi\sigma+\eta\tau)} (0,44+\sigma^2+\tau^2) \sin(\sigma) \sin(\tau)}{E\sigma \left[ 0,08+\sigma^6 + \tau^6 + 0,58\tau^2 + 1,32\tau^4 + \sigma^4 (1,32+3\tau^2) + \sigma^2 (0,58+2,64\tau^2+3\tau^4) \right]}, \\ \tilde{w} &= \frac{a^3 p e^{-i(\xi\sigma+\eta\tau)} \left[ 0,16+1,68\sigma^4 + 1,11\tau^2 + 1,68\tau^4 + \sigma^2 (1,11+3,35\tau^2) \right] \sin(\sigma) \sin(\tau)}{E\sigma\tau \left[ 0,08+\sigma^6 + \tau^6 + 0,58\tau^2 + 1,32\tau^4 + \sigma^4 (1,32+3\tau^2) + \sigma^2 (0,58+2,64\tau^2+3\tau^4) \right]};\end{aligned}\quad (7.16)$$

3) dla  $\nu=1/4$  oraz  $\lambda=1$

$$\begin{aligned}\tilde{u} &= 0, \quad \tilde{v} = 0, \\ \tilde{w} &= \frac{a^3 p e^{-i(\xi\sigma+\eta\tau)} \left[ 13,48+4,67\sigma^4 + 18,31\tau^2 + 4,67\tau^4 + \sigma^2 (18,31+9,33\tau^2) \right] \sin(\sigma) \sin(\tau)}{E\sigma\tau \left[ 25,5 + \sigma^6 + \tau^6 + 37,54\tau^2 + 12,75\tau^4 + \sigma^4 (12,75+3\tau^2) + \sigma^2 (37,54+25,51\tau^2+3\tau^4) \right]};\end{aligned}\quad (7.17)$$

4) dla  $\nu=1/4$  oraz  $\lambda=5$

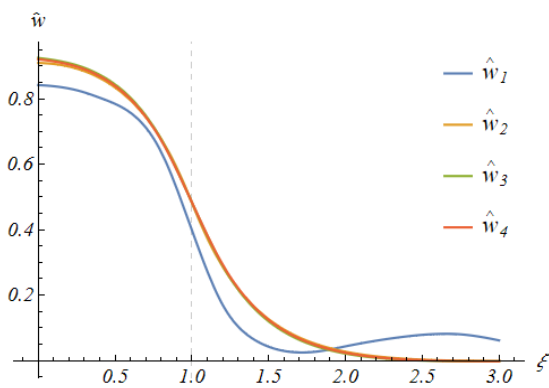
$$\begin{aligned}\tilde{u} &= 0, \quad \tilde{v} = 0, \\ \tilde{w} &= \frac{a^3 p e^{-i(\xi\sigma+\eta\tau)} \left[ 0,08+1,85\sigma^4 + 0,87\tau^2 + 1,85\tau^4 + \sigma^2 (0,87+3,69\tau^2) \right] \sin(\sigma) \sin(\tau)}{E\sigma\tau \left( 0,04+\sigma^6 + \tau^6 + 0,54\tau^2 + 1,53\tau^4 + \sigma^4 (1,53+3\tau^2) + \sigma^2 (0,54+3,06\tau^2+3\tau^4) \right)}.\end{aligned}\quad (7.18)$$

W przypadku  $\nu=1/4$  i  $\nu=1/2$  transformaty przemieszczeń poziomych są równe zero, natomiast transformata przemieszczeń pionowych jest równa zero tylko dla  $\nu=1/2$ .

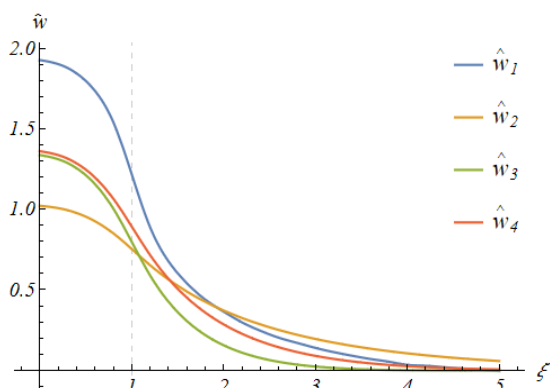
Całkowanie numeryczne transformat przemieszczeń (7.10)-(7.18) zostało wykonane w programie Wolfram *Mathematica 13*. Składnia *NIntegrate* jest następująca:  
*NIntegrate*[ $\tilde{w}$ , { $\sigma$ , - $\infty$ ,  $\infty$ }, { $\tau$ , - $\infty$ ,  $\infty$ }, *Method*→"*GaussKronrodRule*", *MaxRecursion*→100].

Na rys.7.1-7.6 przedstawiono wykresy przemieszczeń  $\hat{u}(\xi, 0, 0)$ ,  $\hat{w}(\xi, 0, 0)$  dla warstwy obciążonej w kształcie kwadratu. Na poniższych rysunkach wprowadzono następujące oznaczenia<sup>69/</sup>:

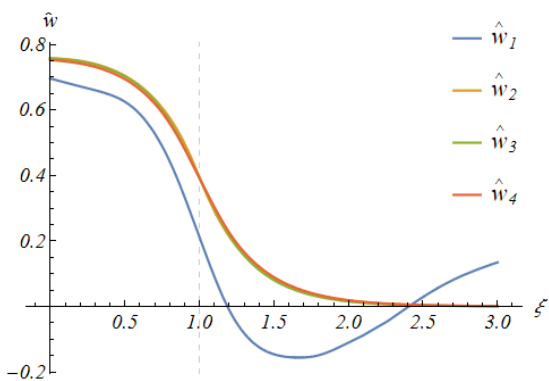
- 1)  $\hat{w}_1$  – przemieszczenie według teorii sprężystości (patrz podpunkt 3.1.3);
- 2)  $\hat{w}_2, \hat{u}_2$  – przemieszczenie według zmodyfikowanego modelu dla przyjętej liniowej funkcji zanikania (4.26)<sub>1</sub>;
- 3)  $\hat{w}_3, \hat{u}_3$  – przemieszczenie według zmodyfikowanego modelu dla przyjętej hiperbolicznej funkcji zanikania (4.26)<sub>2</sub>;
- 4)  $\hat{w}_4, \hat{u}_4$  – przemieszczenie według zmodyfikowanego modelu dla przyjętej funkcji zanikania (4.29).



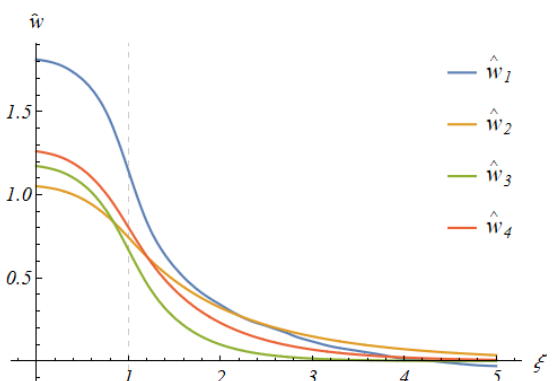
Rys.7.1. Wykres  $\hat{w}(\xi, 0, 0)$  dla  $\nu=0, \kappa=1, \lambda=1$ .



Rys.7.2. Wykres  $\hat{w}(\xi, 0, 0)$  dla  $\nu=0, \kappa=1, \lambda=5$ .

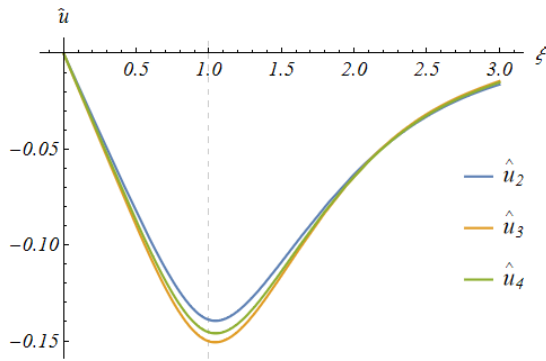


Rys.7.3. Wykres  $\hat{w}(\xi, 0, 0)$  dla  $\nu=1/4, \kappa=1, \lambda=1$ .

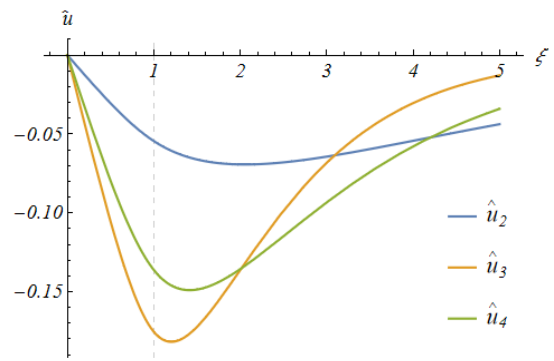


Rys.7.4. Wykres  $\hat{w}(\xi, 0, 0)$  dla  $\nu=1/4, \kappa=1, \lambda=5$ .

<sup>69/</sup> Oznaczenia dotyczą rys.7.1-7.6 i rys.7.19-7.20.



Rys.7.5. Wykres  $\hat{u}(\xi, 0, 0)$  dla  $v=0, \kappa=1, \lambda=1$ .

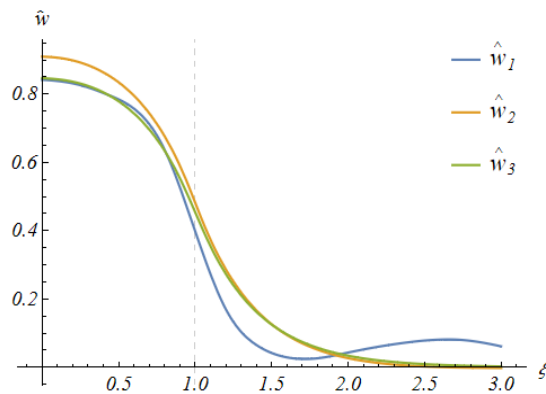


Rys.7.6. Wykres  $\hat{u}(\xi, 0, 0)$  dla  $v=0, \kappa=1, \lambda=5$ .

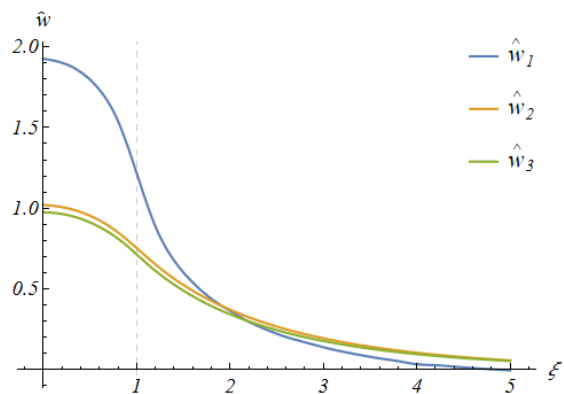
Jak wynika z rys.7.1-7.6, w przypadku  $\lambda=1$ , przemieszczenia, obliczone dla różnych funkcji zanikania, praktycznie się nie różnią. Jednak dla  $\lambda=5$ , wartości przemieszczeń znacznie zależą od przyjętej funkcji aproksymującej przemieszczenia po głębokości warstwy.

Na rys.7.7-7.8 przedstawiono wykresy przemieszczeń pionowych  $\hat{w}(\xi, 0, 0)$  dla przyjętej liniowej funkcji zanikania  $\psi(z)$  w postaci (4.26)<sub>1</sub>. Na poniższych rysunkach wprowadzono następujące oznaczenia<sup>70/</sup>:

- 1)  $\hat{w}_1$  – przemieszczenie warstwy według teorii sprężystości (patrz podpunkt 3.1.3);
- 2)  $\hat{w}_2$  – przemieszczenie warstwy według zmodyfikowanego modelu (7.3);
- 3)  $\hat{w}_3$  – przemieszczenie warstwy według modelu Vlasova (2.8).



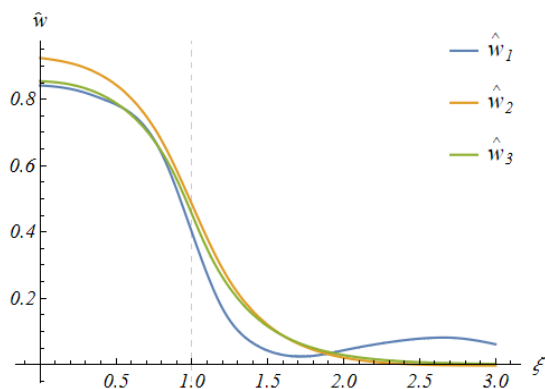
Rys.7.7. Wykres  $\hat{w}(\xi, 0, 0)$  dla  $v=0, \kappa=1, \lambda=1$ .



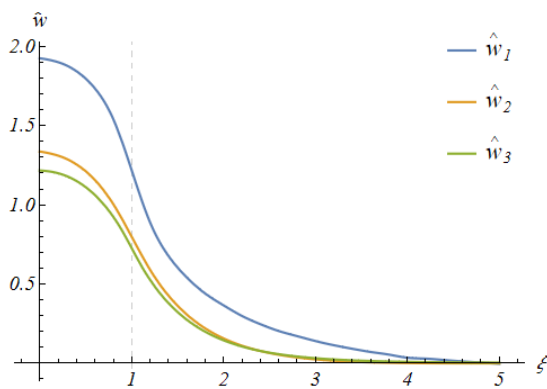
Rys.7.8. Wykres  $\hat{w}(\xi, 0, 0)$  dla  $v=0, \kappa=1, \lambda=5$ .

Na rys.7.9-7.10 przedstawiono wykresy przemieszczeń pionowych  $\hat{w}(\xi, 0, 0)$  dla przyjętej hiperbolicznej funkcji zanikania  $\psi(z)$  w postaci (4.26)<sub>2</sub>.

<sup>70/</sup> Oznaczenia dotyczą rys.7.7-7.18 i rys.7.21-7.26.

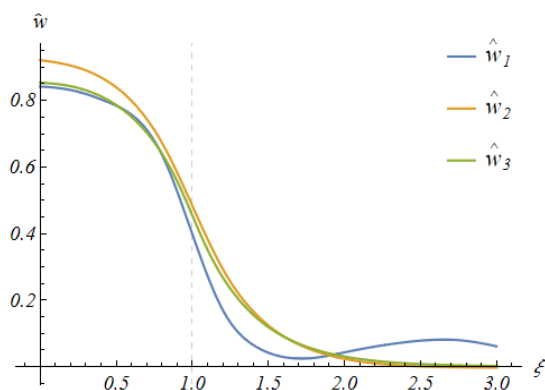


Rys.7.9. Wykres  $\hat{w}(\xi, 0, 0)$  dla  $\nu=0, \kappa=1, \lambda=1$ .

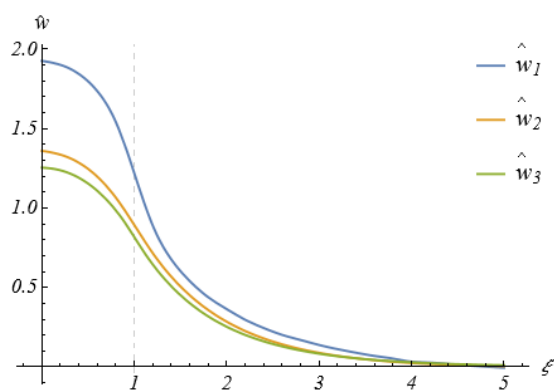


Rys.7.10. Wykres  $\hat{w}(\xi, 0, 0)$  dla  $\nu=0, \kappa=1, \lambda=5$ .

Na rys.7.11-7.12 przedstawiono wykresy przemieszczeń pionowych  $\hat{w}(\xi, 0, 0)$  dla przyjętej funkcji zanikania  $\psi(z)$  w postaci (4.29).



Rys.7.11. Wykres  $\hat{w}(\xi, 0, 0)$  dla  $\nu=0, \kappa=1, \lambda=1$ .

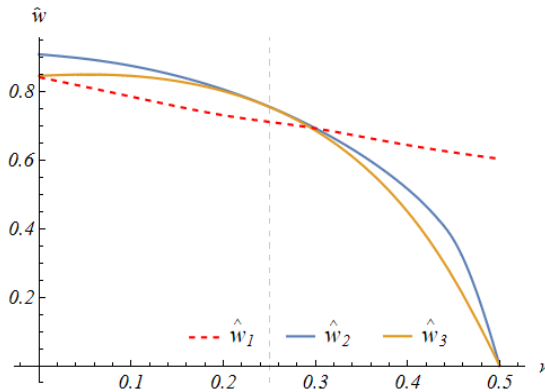


Rys.7.12. Wykres  $\hat{w}(\xi, 0, 0)$  dla  $\nu=0, \kappa=1, \lambda=5$ .

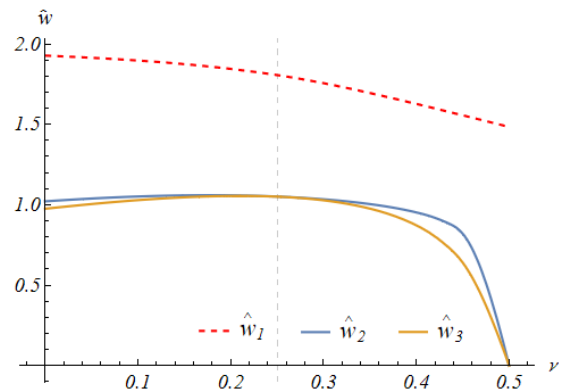
Jak wynika z rys.7.7-7.12, maksymalne przemieszczenia pionowe, obliczone według zmodyfikowanego modelu podłoża, są większe od przemieszczeń, otrzymanych według teorii sprężystości oraz modelu Vlasova dla  $\lambda=1$ . Ze zwiększeniem  $\lambda$  wzrasta różnica pomiędzy przemieszczeniem według teorii sprężystości a zmodyfikowanym modelem podłoża. Jednak uwzględnienie wszystkich trzech niezerowych składowych wektora przemieszczenia pozwala otrzymać wyniki bardziej zbliżone do rozwiązania ścisłego teorii sprężystości niż według modelu podłoża Vlasova. W przypadku  $\nu=1/4$  przemieszczenia poziome są równe zero – otrzymujemy założenia modelu podłoża Vlasova.

Na rys.7.13-7.14 przedstawiono wykresy zależności maksymalnych przemieszczeń pionowych  $\hat{w}(0, 0, 0, \nu)$  od  $\nu$  dla przyjętej liniowej funkcji zanikania  $\psi(\zeta)$  w postaci (4.26)<sub>1</sub>.



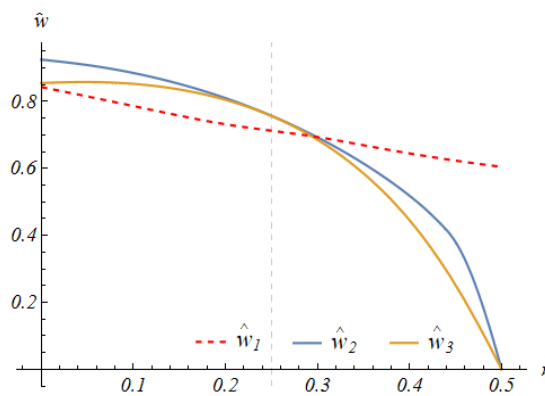


Rys.7.13. Wykres  $\hat{w}(0,0,0,\nu)$  dla  $\kappa=1, \lambda=1$ .

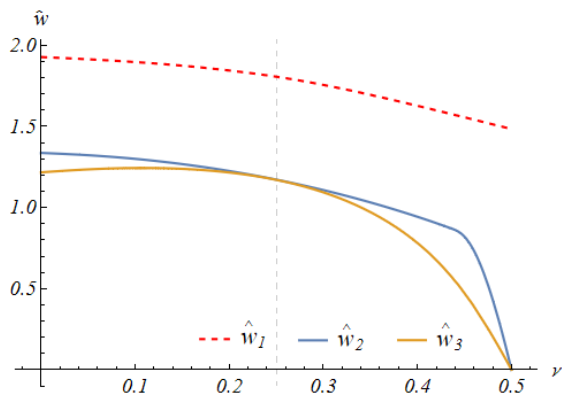


Rys.7.14. Wykres  $\hat{w}(0,0,0,\nu)$  dla  $\kappa=1, \lambda=5$ .

Na rys.7.15-7.16 przedstawiono wykresy zależności maksymalnych przemieszczeń pionowych  $\hat{w}(0,0,0,\nu)$  od  $\nu$  dla przyjętej hiperbolicznej funkcji zanikania  $\psi(\zeta)$  w postaci (4.26)<sub>2</sub>.

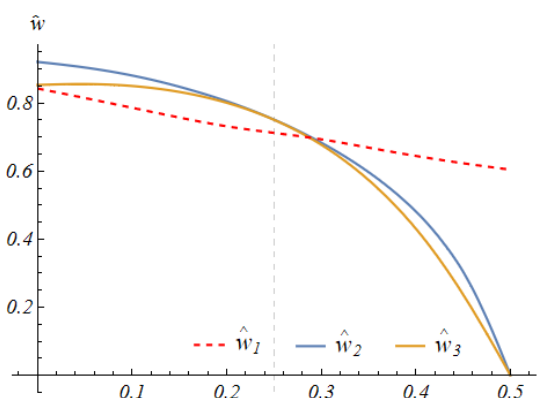


Rys.7.15. Wykres  $\hat{w}(0,0,0,\nu)$  dla  $\kappa=1, \lambda=1$ .

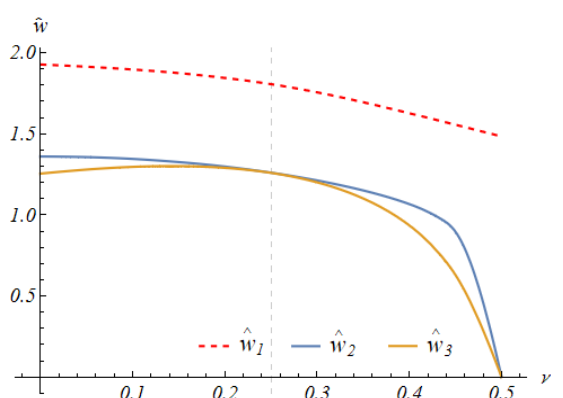


Rys.7.16. Wykres  $\hat{w}(0,0,0,\nu)$  dla  $\kappa=1, \lambda=5$ .

Na rys.7.17-7.18 przedstawiono wykresy zależności maksymalnych przemieszczeń pionowych  $\hat{w}(0,0,0,\nu)$  od  $\nu$  dla przyjętej funkcji  $\psi(\zeta)$  w postaci (4.29).



Rys.7.17. Wykres  $\hat{w}(0,0,0,\nu)$  dla  $\kappa=1, \lambda=1$ .

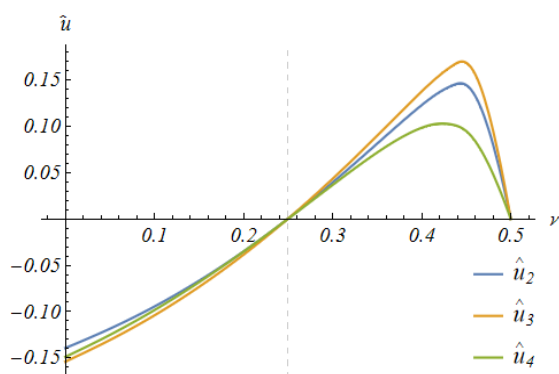


Rys.7.18. Wykres  $\hat{w}(0,0,0,\nu)$  dla  $\kappa=1, \lambda=5$ .

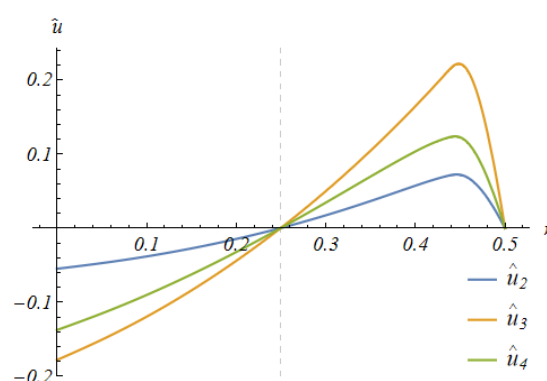
Jak wynika z rys.7.13-7.18, maksymalne przemieszczenia pionowe, otrzymane według zmodyfikowanego modelu podłoża, są większe od przemieszczeń, otrzymanych

według klasycznego modelu Vlasova. W przypadku, kiedy  $\nu=1/4$ , zmodyfikowany model upraszcza się do modelu Vlasova. Charakterystyczną cechą zmodyfikowanego modelu podłoża jest równość zera przemieszczeń pionowych dla  $\nu=1/2$ , w przeciwieństwie od rozwiązania ścisłego teorii sprężystości.

Na rys.7.19-7.20 przedstawiono wykresy zależności maksymalnych przemieszczeń poziomych  $\hat{u}(1,0,0,\nu)$  od  $\nu$ , sporządzone dla przyjętych funkcji  $\psi(\zeta)$  w postaci (4.26)<sub>1</sub>, (4.26)<sub>2</sub> i (4.29)<sup>71/</sup>.



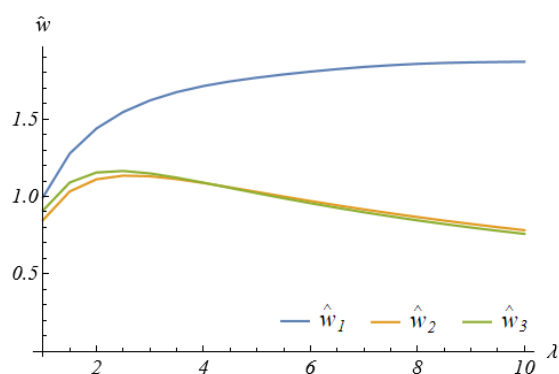
Rys.7.19. Wykres  $\hat{u}(1,0,0,\nu)$  dla  $\kappa=1, \lambda=1$ .



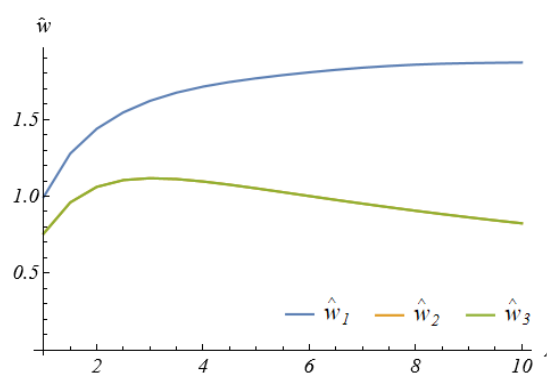
Rys.7.20. Wykres  $\hat{u}(1,0,0,\nu)$  dla  $\kappa=1, \lambda=5$ .

Z rys.7.19-7.20 wynika, że maksymalne przemieszczenia poziome dla  $\nu=1/4$  zmieniają znak z ujemnych na dodatnie. Największe (ujemne lub dodatnie) wartości przemieszczeń poziomych uzyskuje się dla hiperbolicznej funkcji zanikania (4.26)<sub>2</sub>.

Na rys.7.21-7.22 przedstawiono wykresy zależności maksymalnych przemieszczeń poziomych  $\hat{w}(0,0,0,\lambda)$  od  $\lambda$ , sporządzone dla przyjętej liniowej funkcji zanikania  $\psi(\zeta)$  w postaci (4.26)<sub>1</sub><sup>72/</sup>.



Rys.7.21. Wykres  $\hat{w}(0,0,0,\lambda)$  dla  $\kappa=1, \nu=0$ .



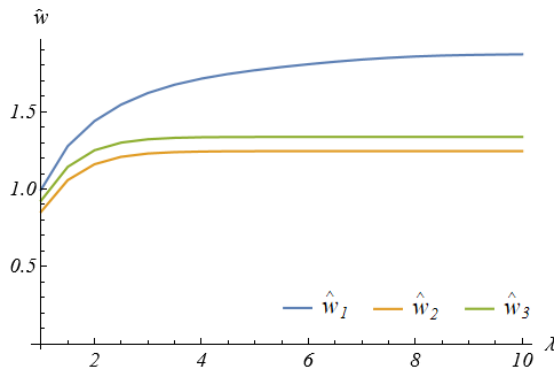
Rys.7.22. Wykres  $\hat{w}(0,0,0,\lambda)$  dla  $\kappa=1, \nu=1/4$ .

<sup>71/</sup> Oznaczenia krzywych patrz odnośnik nr 69, s. 118.

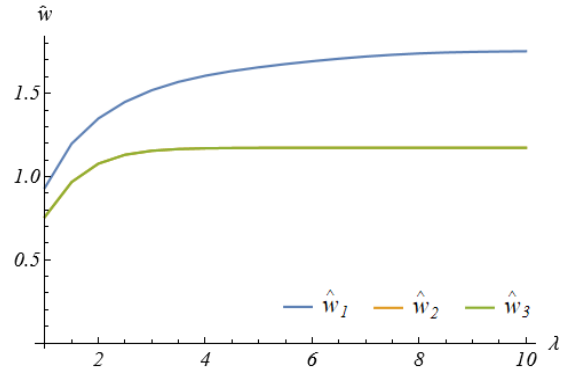
<sup>72/</sup> Oznaczenia patrz odnośnik nr 70, s. 119.

Z rys.7.21-7.22 wynika, że wraz ze wzrostem miąższości warstwy, w przypadku liniowej funkcji zanikania, przemieszczenia pionowe dążą do zera. Taki wynik jest niezgodny z rozwiązaniem ścisłym teorii sprężystości oraz intuicją inżynierską.

Na rys.7.23-7.24 przedstawiono wykresy zależności maksymalnych przemieszczeń pionowych  $\hat{w}(0,0,0,\lambda)$  od  $\lambda$ , sporządzone dla przyjętej hiperbolicznej funkcji zanikania  $\psi(\zeta)$  w postaci (4.26)<sup>73/</sup>.

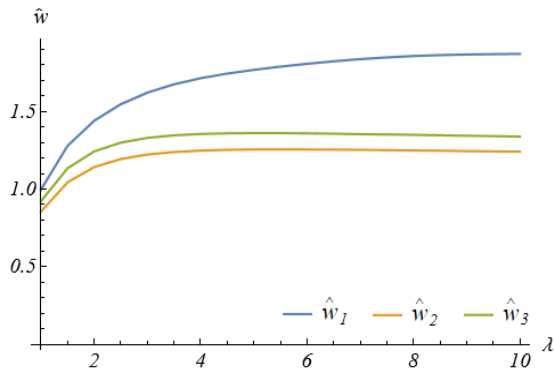


Rys.7.23. Wykres  $\hat{w}(0,0,0,\lambda)$  dla  $\kappa=1, \nu=0$ .

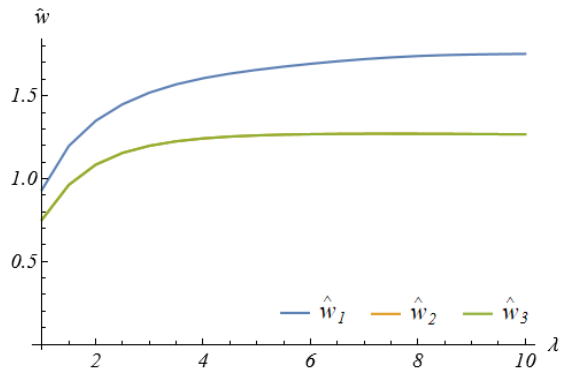


Rys.7.24. Wykres  $\hat{w}(0,0,0,\lambda)$  dla  $\kappa=1, \nu=1/4$ .

Na rys.7.25-7.26 przedstawiono wykresy zależności maksymalnych przemieszczeń pionowych  $\hat{w}(0,0,0,\lambda)$  od  $\lambda$ , sporządzone dla przyjętej funkcji zanikania  $\psi(\zeta)$  w postaci (4.29)<sup>74/</sup>.



Rys.7.25. Wykres  $\hat{w}(0,0,0,\lambda)$  dla  $\kappa=1, \nu=0$ .



Rys.7.26. Wykres  $\hat{w}(0,0,0,\lambda)$  dla  $\kappa=1, \nu=1/4$ .

Jak wynika z rys.7.23-7.26, przemieszczenia pionowe dla małych wartości  $\lambda$ , otrzymane według zmodyfikowanego modelu, są zbliżone do przemieszczeń, otrzymanych według teorii sprężystości. Ze zwiększeniem miąższości warstwy powstaje znaczny błąd według zmodyfikowanego modelu podłoża. Dla hiperbolicznej funkcji zanikania (4.26)<sub>2</sub> oraz funkcji (4.29), przemieszczenia pionowe stabilizują się dla  $\lambda > 4$  przyjmując

<sup>73/</sup> Oznaczenia patrz odnośnik nr 70, s. 119.

<sup>74/</sup> Tamże, s. 119.

maksymalne wartości odpowiednio 1,336 (dla  $\nu=0$ ) oraz 1,173 (dla  $\nu=1/4$ ). Natomiast przemieszczenia pionowe warstwy według teorii sprężystości asymptotycznie rosną do wartości 2,244 (dla  $\nu=0$ ) oraz 2,104 (dla  $\nu=1/4$ ).

Podsumowując, zmodyfikowany model podłoża, w odróżnieniu od rozwiązania ścisłego teorii sprężystości, charakteryzuje się tym, że przemieszczenia (zarówno poziome, jak i pionowe) są równe zero dla współczynnika Poissona  $\nu=1/2$ . W przypadku rozwiązania ścisłego według teorii sprężystości, przemieszczenia pionowe są różne od zera dla  $\nu=1/2$ , a według zmodyfikowanego modelu są równe zero (rys.7.13-7.18). Dla  $\nu=1/4$ , przemieszczenia poziome według zmodyfikowanego modelu podłoża są równe zero (rys.7.19-7.20). W tym przypadku otrzymujemy model podłoża Vlasova.

### 7.2.2 Obciążenie w kształcie koła

Rozpatrzmy zagadnienie obciążenia warstwy na powierzchni w kształcie koła o promieniu  $a$  (rys.5.1). W przypadku ośrodka izotropowego, przy pominięciu obciążeń stycznych, zakładając, że parametry materiałowe są niezależne od zmiennej  $z$  oraz przyjmując

$$\phi(z) = \psi(z), \quad (7.19)$$

parametry całkowe (6.42) zapiszemy następująco:

$$\begin{aligned} a_1 &= C_{11} \int_0^H \psi^2(z) dz, & a_2 &= G_3 \int_0^H \psi^2(z) dz, \\ b_1 &= G_3 \int_0^H [\psi'(z)]^2 dz, & b_2 &= C_{33} \int_0^H [\psi'(z)]^2 dz, \\ d_{13} &= C_{13} \int_0^H \psi(z) \psi'(z) dz, & d_{31} &= G_3 \int_0^H \psi(z) \psi'(z) dz, \end{aligned} \quad (7.20)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, & C_{13} &= \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \\ C_{33} &= \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, & G_3 = G &= \frac{E}{2(1+\nu)}. \end{aligned} \quad (7.21)$$

Dla  $\nu=1/4$  układ równań różniczkowych (6.41) rozseparowuje się na dwa niezależne równania na poszukiwane przemieszczenia  $u$  oraz  $w$  które zapiszemy następująco (patrz podrozdział 6.7):

dla  $0 \leq r \leq a$

$$\begin{aligned} u_1''(r) + \frac{u_1'(r)}{r} - \left( \frac{1}{r^2} + \delta^2 \right) u_1(r) &= 0, \\ w_1''(r) + \frac{w_1'(r)}{r} - 9\delta^2 w_1(r) &= -\frac{3p}{a_1}, \end{aligned} \quad (7.22)$$

dla  $r > a$

$$\begin{aligned} u_{II}''(r) + \frac{u_{II}'(r)}{r} - \left( \frac{1}{r^2} + \delta^2 \right) u_{II}(r) &= 0, \\ w_{II}''(r) + \frac{w_{II}'(r)}{r} - 9\delta^2 w_{II}(r) &= 0, \end{aligned} \quad (7.23)$$

gdzie:

$$\delta^2 = \frac{b_1}{a_1}, \quad (7.24)$$

Parametry całkowe (6.46) i (7.20) w przypadku jednorodnego ośrodka izotropowego wynoszą:

$$a_2 = \frac{1}{3}a_1, \quad a_{12} = \frac{1}{3}a_1, \quad a_{21} = a_1, \quad a_{13} = d_{13}, \quad b_2 = 3b_1. \quad (7.25)$$

Uogólnione siły podłużne i poprzeczne, występujące w podłożu sprężystym, zapisujemy następującymi wzorami:

$$\begin{aligned} T_1(r) &= \int_0^H \sigma_{r_1} \psi(z) dz = a_1 \left[ \frac{1}{3r} u_1(r) + u_1'(r) \right] + d_{13} w_1(r), \\ T_{II}(r) &= \int_0^H \sigma_{r_{II}} \psi(z) dz = a_1 \left[ \frac{1}{3r} u_{II}(r) + u_{II}'(r) \right] + d_{13} w_{II}(r), \\ S_1(r) &= \int_0^H \sigma_{r_{z_1}} \psi(z) dz = d_{13} u_1(r) + \frac{a_1}{3} w_1'(r), \\ S_{II}(r) &= \int_0^H \sigma_{r_{z_{II}}} \psi(z) dz = d_{13} u_{II}(r) + \frac{a_1}{3} w_{II}'(r). \end{aligned} \quad (7.26)$$

Rozwiązanie równań różniczkowych (7.22) zapiszemy w postaci:

$$\begin{aligned} u_1(r) &= C_1 I_1(r\delta) + C_2 K_1(r\delta), \quad u_{II}(r) = D_1 K_1(r\delta) + D_2 I_1(r\delta), \\ w_1(r) &= \frac{p}{3a_1 \delta^2} + C_3 I_0(3r\delta) + C_4 K_0(3r\delta). \end{aligned} \quad (7.27)$$

Warunki brzegowe i warunki ciągłości w przypadku warstwy obciążonej obrotowo-symetrycznie są następujące:

$$\begin{aligned} u_I|_{r=0} &= 0, & u_{II}|_{r \rightarrow \infty} &= 0, & w_{II}|_{r \rightarrow \infty} &= 0, \\ w_I|_{r=a} &= w_{II}|_{r=a}, & u_I|_{r=a} &= u_{II}|_{r=a}, & S_I|_{r=a} &= S_{II}|_{r=a}, & T_I|_{r=a} &= T_{II}|_{r=a}. \end{aligned} \quad (7.28)$$

Uwzględniając, że  $w(0)$  przyjmuje wartość skończoną, a także warunek brzegowy (7.28)<sub>1</sub>, stałe  $C_2$  i  $C_4$  muszą być równe zero. Natomiast z warunków (7.28)<sub>3,4</sub> wynika, że stałe  $D_2$  i  $D_4$  też muszą być równe zero. W wyniku, po uwzględnieniu warunków (7.28)<sub>1</sub> oraz (7.28)<sub>3,4</sub>, funkcje przemieszczeń (7.27) zapiszemy następująco:

$$\begin{aligned} u_I(r) &= C_1 I_1(r\delta), & u_{II}(r) &= D_1 K_1(r\delta), \\ w_I(r) &= \frac{P}{3a_1 \delta^2} + C_3 I_0(3r\delta), & w_{II}(r) &= D_3 K_0(3r\delta). \end{aligned} \quad (7.29)$$

Podstawiając przemieszczenia (7.29) do wzorów (7.26) otrzymamy:

$$\begin{aligned} T_I(r) &= \frac{d_{13}P}{3a_1 \delta^2} - C_1 a_1 \left[ \frac{2}{3r} I_1(r\delta) + \delta I_0(r\delta) \right] + d_{13} C_3 I_0(3r\delta), \\ T_{II}(r) &= d_{13} D_3 K_0(3r\delta) - a_1 D_1 \left[ \delta K_0(r\delta) + \frac{2K_1(r\delta)}{3r} \right], \\ S_I(r) &= a_1 C_3 \delta I_1(3r\delta) + d_{13} C_1 I_1(r\delta), \\ S_{II}(r) &= D_1 d_{13} K_1(r\delta) - a_1 D_3 \delta K_1(3r\delta). \end{aligned} \quad (7.30)$$

Uwzględniając pozostałe warunki (7.28), wyznaczymy stałe całkowania:

$$C_1 = 0, \quad C_3 = -\frac{ap}{a_1 \delta} K_1(3a\delta), \quad D_1 = 0, \quad D_3 = \frac{ap}{a_1 \delta} I_1(3a\delta). \quad (7.31)$$

Ostatecznie, wyrażenia na przemieszczenia zapiszemy w postaci:

$$\begin{aligned} u_I(r) &= 0, & u_{II}(r) &= 0, \\ w_I(r) &= \frac{p(1-3a\delta)}{3a_1 \delta^2} K_1(3a\delta) I_0(3r\delta), & w_{II}(r) &= \frac{ap}{a_1 \delta} I_1(3a\delta) K_0(3r\delta). \end{aligned} \quad (7.32)$$

Jak widać, przemieszczenia poziome dla  $\nu=1/4$  wynoszą zero. Analogiczne rezultaty otrzymaliśmy dla transformat przemieszczeń warstwy obciążonej na powierzchni w kształcie prostokąta dla  $\nu=1/4$  (patrz podrozdział 7.2.1, wzory (7.11)<sub>1,2</sub> i (7.14)<sub>1,2</sub>). Uwzględniając powyższe wyniki możemy wywnioskować, że w przypadku  $\nu=1/4$  wektor przemieszczenia  $\mathbf{u}$  ma tylko jedną niezerową składową pionową  $w$ .

Przyjmując funkcje zanikania przemieszczeń w postaci (4.26)<sub>1</sub> i (4.26)<sub>2</sub>, z zależności (7.20) wyznaczmy parametr całkowity  $a_1$ , a następnie przemieszczenia  $w_I(r)$  i  $w_{II}(r)$ . Przechodząc na układ współrzędnych bezwymiarowych:

$$\rho = \frac{r}{a}, \quad \zeta = \frac{z}{a}, \quad \lambda = \frac{H}{a}, \quad (7.33)$$

otrzymamy następujące wyrażenia na przemieszczenia pionowe:

1) dla liniowej funkcji zanikania przemieszczeń, przyjętej w postaci (4.26)<sub>1</sub>

$$w_I(\rho) = \frac{ap}{E} \hat{w}_I(\rho), \quad w_{II}(\rho) = \frac{ap}{E} \hat{w}_{II}(\rho), \quad (7.34)$$

gdzie:

$$\hat{w}_I(\rho) = \frac{5}{6} \left[ \lambda - 3K_1 \left( \frac{3}{\lambda} \right) I_0 \left( \frac{3\rho}{\lambda} \right) \right], \quad \hat{w}_{II}(\rho) = \frac{5}{2} I_1 \left( \frac{3}{\lambda} \right) K_0 \left( \frac{3\rho}{\lambda} \right); \quad (7.35)$$

2) dla hiperbolicznej funkcji zanikania przemieszczeń, przyjętej w postaci (4.26)<sub>2</sub>

$$w_I(\rho) = \frac{ap}{E} \hat{w}_I(\rho), \quad w_{II}(\rho) = \frac{ap}{E} \hat{w}_{II}(\rho), \quad (7.36)$$

gdzie:

$$\hat{w}_I(\rho) = \frac{5\sqrt{\alpha_1} \left[ \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} - \sqrt{3}(2\lambda + \sinh(2\lambda)) K_1(\sqrt{3}\sqrt{\alpha_1}) {}_0\tilde{F}_1 \left( ; 1; \frac{3\alpha_1\rho^2}{4} \right) \right]}{6[\cosh(\lambda) + \lambda \operatorname{csch}(\lambda)]^2}, \quad (7.37)$$

$$\hat{w}_{II}(\rho) = \frac{5 {}_0\tilde{F}_1 \left( ; 2; \alpha_3 \right) \sinh^2(\lambda) K_0(\sqrt{3}\alpha_1\rho)}{\sinh(2\lambda) - 2\lambda}.$$

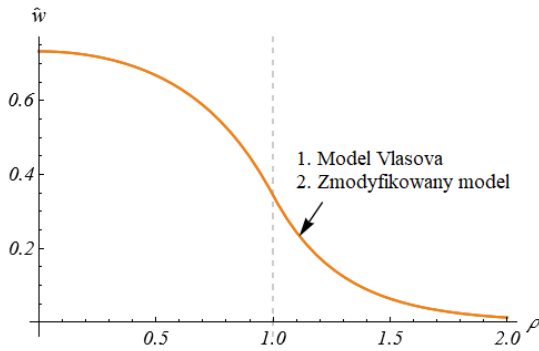
We wzorach (7.37) wprowadzono następujące oznaczenia:

$$\alpha_1 = \frac{4\lambda}{\sinh(2\lambda) - 2\lambda} + 1, \quad \alpha_2 = \frac{1}{\sinh^2(2\lambda) - 4\lambda^2}, \quad \alpha_3 = \frac{3\lambda}{\sinh(2\lambda) - 2\lambda} + \frac{3}{4},$$

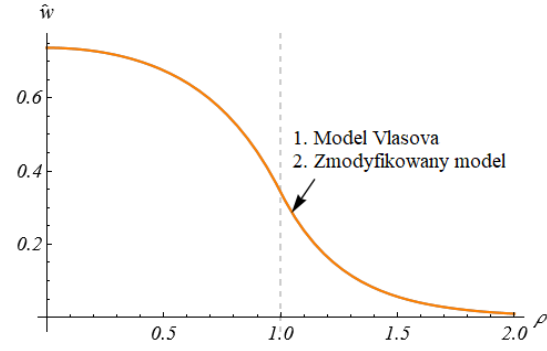
$\tilde{F}_1$  – jest uregulowaną konfluentną funkcją hipergeometryczną [78],

$K_0$  i  $K_1$  – zmodyfikowane funkcje Bessela drugiego rodzaju, odpowiednio zerowego i pierwszego rzędu [80].

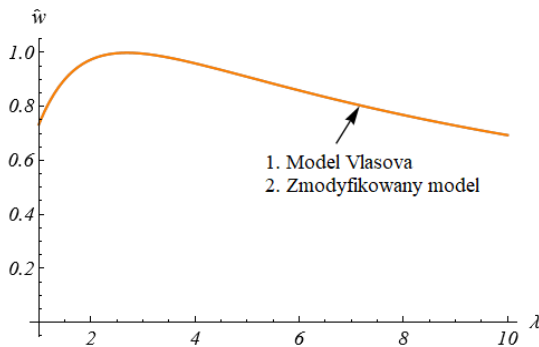
Na rys.7.27-7.30 przedstawiono porównawcze wykresy przemieszczeń pionowych  $\hat{w}(\rho, 0)$ , a także  $\hat{w}(0, 0, \lambda)$  dla warstwy obciążonej na powierzchni w kształcie koła o promieniu  $a$ , otrzymane według rozwiązania (7.34) i (7.36) oraz według modelu podłoża Vlasova (2.8).



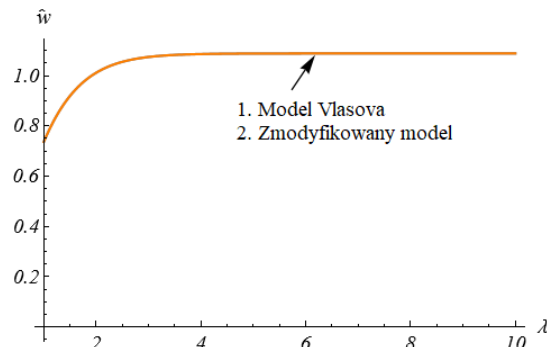
Rys.7.27. Wykres  $\hat{w}(\rho, 0)$  dla  $\hat{\psi}_1, \lambda=1, \nu=1/4$ .



Rys.7.28. Wykres  $\hat{w}(\rho, 0)$  dla  $\hat{\psi}_2, \lambda=1, \nu=1/4$ .



Rys.7.29. Wykres  $\hat{w}(0, 0, \lambda)$  dla  $\hat{\psi}_1, \rho=0, \nu=1/4$ .



Rys.7.30. Wykres  $\hat{w}(0, 0, \lambda)$  dla  $\hat{\psi}_2, \rho=0, \nu=1/4$ .

Z rys.7.27-7.30 wynika, że w przypadku zagadnienia obrotowo-symetrycznego przemieszczenia pionowe, otrzymane według zmodyfikowanego modelu podłoża (6.47) dla  $\nu=1/4$ , nie różnią się od przemieszczeń pionowych według modelu Vlasova (2.8). Wynika to z tego, że dla  $\nu=1/4$  wektor przemieszczenia (6.38) ma tylko jedną niezerową składową pionową  $w$ , co jest analogiczne założeniom kinematycznym Vlasova (2.6).

Podsumowując, zmodyfikowany model podłoża sprężystego dla  $\nu=1/4$  prowadzi do otrzymania takich samych wyników, jak i w przypadku modelu Vlasova ze względu na to, że przemieszczenia poziome, według zmodyfikowanego modelu, są równe zero, zarówno dla warstwy obciążonej w kształcie prostokąta oraz koła.

### 7.3 Rozwiązanie poprzecznie izotropowej warstwy według dwuparametrowego modelu

Równanie zmodyfikowanego dwuparametrowego modelu podłoża poprzecznie izotropowej warstwy obciążonej na powierzchni jest postaci (6.36). W przypadku obciążenia warstwy sprężystej na powierzchni w kształcie koła o promieniu  $a$  (rys.5.1), równanie (6.36) w walcowym układzie współrzędnych przyjmuje postać:



$$\begin{aligned}
k_2 \left[ w_1''(r) + \frac{w_1'(r)}{r} \right] - k_1 w_1(r) + p_3 &= 0, \\
k_2 \left[ w_{II}''(r) + \frac{w_{II}'(r)}{r} \right] - k_1 w_{II}(r) &= 0,
\end{aligned}
\tag{7.38}$$

w której:

$w_1(r)$  – funkcja przemieszczeń dla  $0 \leq r \leq a$ ,

$w_{II}(r)$  – funkcja przemieszczeń dla  $r \geq a$ .

Równania różniczkowe (7.38) różnią się od równań dwuparametrowego modelu podłoża Vlasova (5.1) tylko parametrami całkowymi  $k_1$  i  $k_2$ . Te parametry w tym przypadku są obliczane według wzorów (6.37) dla ośrodka poprzecznie izotropowego. Rozwiązanie równań różniczkowych (7.38) zapiszemy w postaci (5.2), a warunki brzegowe oraz warunki ciągłości są podane w (5.3).

Przyjmując odpowiednią funkcję zanikania przemieszczeń, ze wzorów (6.37) wyznaczmy parametry  $k_1$  i  $k_2$ , które układzie współrzędnych bezwymiarowych (7.33) wynoszą:

1) w przypadku liniowej funkcji zanikania przemieszczeń (4.26)<sub>1</sub>

$$k_1 = \frac{1}{a\lambda} C_{33}, \quad k_2 = \frac{a\lambda}{3} C_{44}; \tag{7.39}$$

2) w przypadku hiperbolicznej funkcji zanikania przemieszczeń (4.26)<sub>2</sub>

$$\begin{aligned}
k_1 &= \frac{\operatorname{csch}(\lambda) [\cosh(\lambda) + \lambda \operatorname{csch}(\lambda)]}{2a} C_{33}, \\
k_2 &= \frac{a [\coth(\lambda) - \lambda \operatorname{csch}^2(\lambda)]}{2} C_{44}.
\end{aligned}
\tag{7.40}$$

Stałe materiałowe wyrazimy poprzez  $E_1$  i  $\nu_1$  następująco:

$$E_3 = \alpha E_1, \quad \nu_3 = \beta \nu_1, \quad G_3 = \gamma G_1 = \frac{\gamma E_1}{2(1 + \nu_1)}, \tag{7.41}$$

$$C_{33} = \frac{E_1 \alpha^2 (1 - \nu_1)}{\alpha (1 - \nu_1) - 2\beta^2 \nu_1^2}, \quad C_{44} = G_3.$$

Ostatecznie, uwzględniając zależności (7.39)-(7.41), przemieszczenia pionowe zapiszemy w postaci:

1) w przypadku liniowej funkcji zanikania przemieszczeń (4.26)<sub>1</sub>

$$w_I(\rho) = \frac{\alpha(1-\nu_1) - 2\beta^2\nu_1^2}{\alpha^2(1-\nu_1)} \left[ \sqrt{6}\alpha\chi_1 K_1\left(\frac{\sqrt{6}\alpha\chi_1}{\lambda}\right) I_0\left(\frac{\sqrt{6}\alpha\rho\chi_1}{\lambda}\right) - \lambda \right],$$

$$w_{II}(\rho) = \frac{\sqrt{6}(1+\nu_1)}{\alpha\chi_1} I_1\left(\frac{\sqrt{6}\alpha\chi_1}{\lambda}\right) K_0\left(\frac{\sqrt{6}\alpha\rho\chi_1}{\lambda}\right),$$
(7.42)

2) w przypadku hiperbolicznej funkcji zanikania przemieszczeń (4.26)<sub>2</sub>

$$w_I(\rho) = \frac{2\sinh(\lambda) [\alpha(1-\nu_1) - 2\beta^2\nu_1^2]}{\alpha^2(1-\nu_1) [\cosh(\lambda) + \lambda\operatorname{csch}(\lambda)]} [1 - 2\alpha\chi_2 K_1(2\alpha\chi_2) I_0(2\alpha\rho\chi_2)],$$

$$w_{II}(\rho) = \frac{4\chi_2 \sinh(\lambda) [\alpha(1-\nu_1) - 2\beta^2\nu_1^2]}{\alpha(1-\nu_1) [\cosh(\lambda) + \lambda\operatorname{csch}(\lambda)]} I_1(2\alpha\chi_2) K_0(2\alpha\rho\chi_2),$$
(7.43)

gdzie:

$$\chi_1 = \sqrt{\frac{1-\nu_1^2}{\gamma(\alpha(1-\nu_1) - 2\beta^2\nu_1^2)}}, \quad \chi_2 = \sqrt{\frac{(1-\nu_1^2) [\lambda + \cosh(\lambda) \sinh(\lambda)]}{\gamma [\alpha(1-\nu_1) - 2\beta^2\nu_1^2] [2\lambda - \sinh(2\lambda)]}},$$

a  $I_0, I_1, K_0$  i  $K_1$  – są zmodyfikowanymi funkcjami Bessela odpowiednio pierwszego i drugiego rodzaju, zerowego i pierwszego rzędu [80].

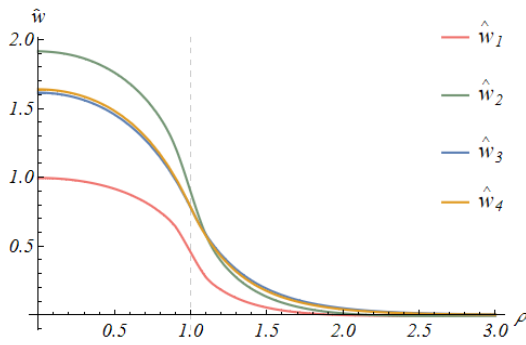
W celu sporządzenia wykresów przemieszczeń zastosowano program *Wolfram Mathematica 13*. Rozwiązanie poprzecznie izotropowej warstwy, obciążonej na powierzchni w kształcie koła o promieniu  $a$  według teorii sprężystości uzyskano w sposób analogiczny jak w podpunkcie 3.3.2.

Na rys.7.31-7.38 przedstawiono porównawcze wykresy przemieszczeń pionowych  $\hat{w}(\rho, 0)$ , otrzymane według teorii sprężystości oraz według zmodyfikowanego modelu podłoża (6.36). Na poniższych rysunkach wprowadzono następujące oznaczenia<sup>75/</sup>:

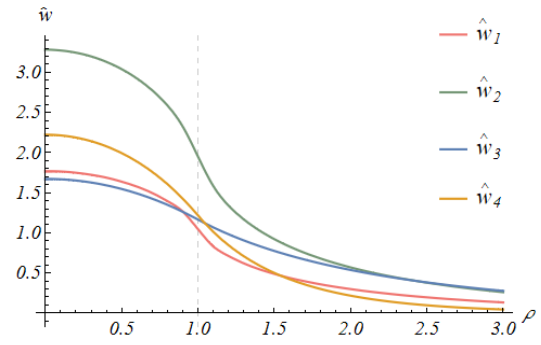
- 1)  $\hat{w}_1$  – przemieszczenie warstwy izotropowej według teorii sprężystości<sup>76/</sup>;
- 2)  $\hat{w}_2$  – przemieszczenie warstwy poprzecznie izotropowej według teorii sprężystości;
- 3)  $\hat{w}_3$  – przemieszczenie warstwy według zmodyfikowanego modelu (6.36) dla przyjętej liniowej funkcji zanikania (4.26)<sub>1</sub>;
- 4)  $\hat{w}_4$  – przemieszczenie warstwy według zmodyfikowanego modelu (6.36) dla przyjętej hiperbolicznej funkcji zanikania (4.26)<sub>2</sub>.

<sup>75/</sup> Oznaczenia dotyczą rys.7.31-7.50.

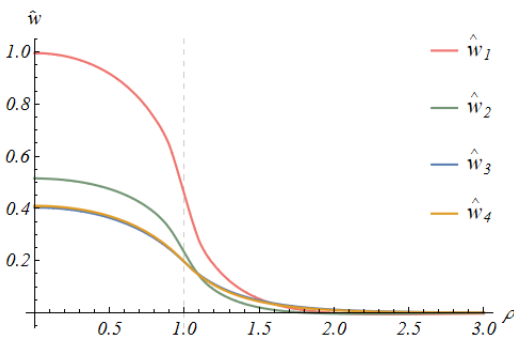
<sup>76/</sup> Patrz podpunkt 3.1.3.



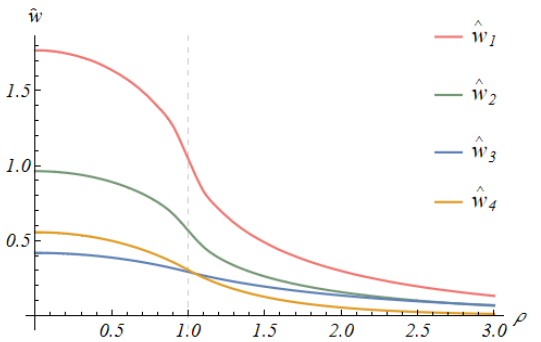
Rys.7.31. Wykres  $\hat{w}(\rho, 0)$  dla  $\lambda=1$ ,  $v_1=0$ ,  $\alpha=1/2$ ,  $\beta=1$ ,  $\gamma=1/2$ .



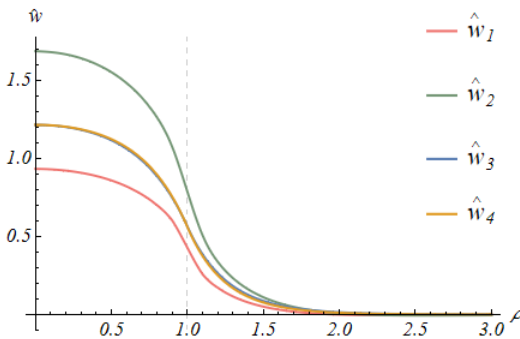
Rys.7.32. Wykres  $\hat{w}(\rho, 0)$  dla  $\lambda=5$ ,  $v_1=0$ ,  $\alpha=1/2$ ,  $\beta=1$ ,  $\gamma=1/2$ .



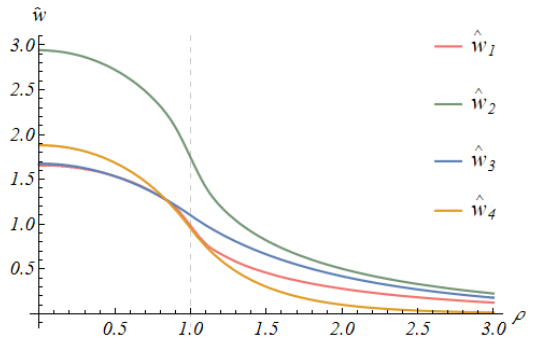
Rys.7.33. Wykres  $\hat{w}(\rho, 0)$  dla  $\lambda=1$ ,  $v_1=0$ ,  $\alpha=2$ ,  $\beta=1$ ,  $\gamma=2$ .



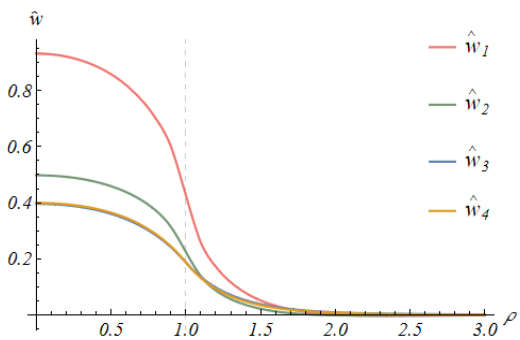
Rys.7.34. Wykres  $\hat{w}(\rho, 0)$  dla  $\lambda=5$ ,  $v_1=0$ ,  $\alpha=2$ ,  $\beta=1$ ,  $\gamma=2$ .



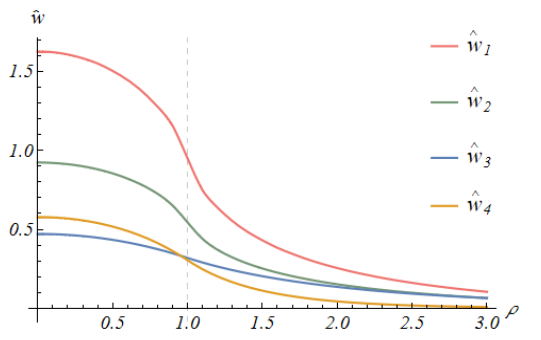
Rys.7.35. Wykres  $\hat{w}(\rho, 0)$  dla  $\lambda=1$ ,  $v_1=1/4$ ,  $\alpha=1/2$ ,  $\beta=1$ ,  $\gamma=1/2$ .



Rys.7.36. Wykres  $\hat{w}(\rho, 0)$  dla  $\lambda=5$ ,  $v_1=1/4$ ,  $\alpha=1/2$ ,  $\beta=1$ ,  $\gamma=1/2$ .



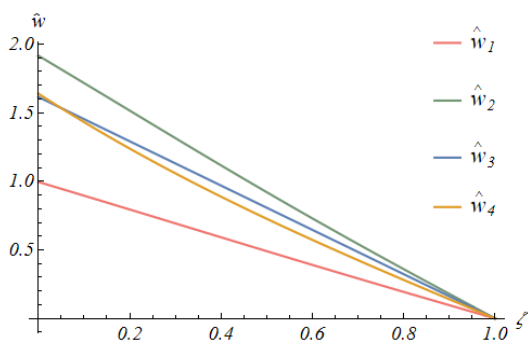
Rys.7.37. Wykres  $\hat{w}(\rho, 0)$  dla  $\lambda=1$ ,  $v_1=1/4$ ,  $\alpha=2$ ,  $\beta=1$ ,  $\gamma=2$ .



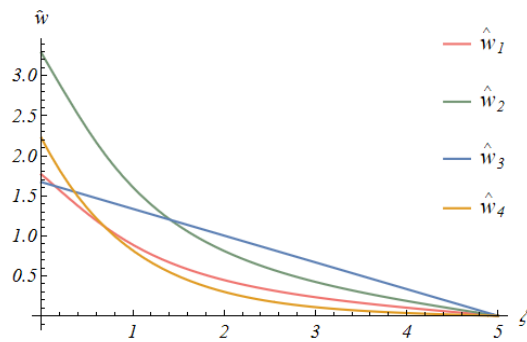
Rys.7.38. Wykres  $\hat{w}(\rho, 0)$  dla  $\lambda=5$ ,  $v_1=1/4$ ,  $\alpha=2$ ,  $\beta=1$ ,  $\gamma=2$ .

Z rys.7.31-7.38 wynika, że dla  $\lambda=1$ , przemieszczenia, otrzymane według zmodyfikowanego modelu podłoża dla liniowej oraz hiperbolicznej funkcji zanikania, są bardzo podobne. Natomiast, według teorii sprężystości maksymalne przemieszczenia są większe na około 15%, a poza granicami przyłożonego obciążenia wykresy prawie się pokrywają. Dla  $\lambda=5$  różnica pomiędzy maksymalnymi przemieszczeniami jest znaczna i wynosi nawet około 50%.

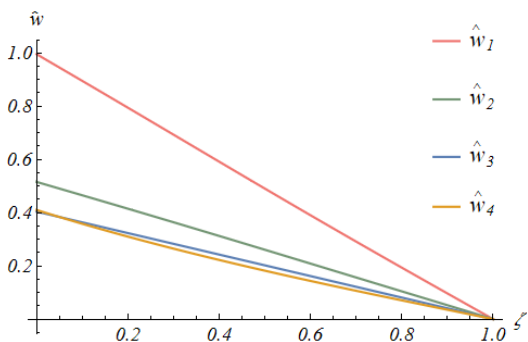
Na rys.7.38-7.46 przedstawiono porównawcze wykresy zanikania maksymalnych przemieszczeń pionowych  $\hat{w}(0, \zeta)$ .



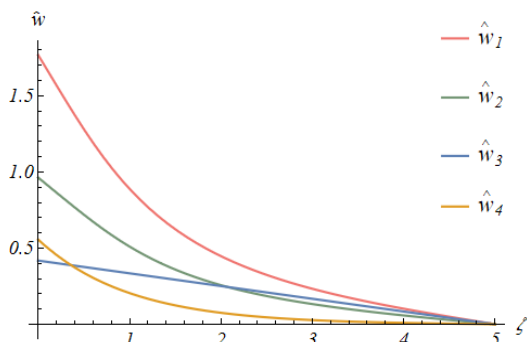
Rys.7.39. Wykres  $\hat{w}(0, \zeta)$  dla  $\lambda=1, v_1=0, \alpha=1/2, \beta=1, \gamma=1/2$ .



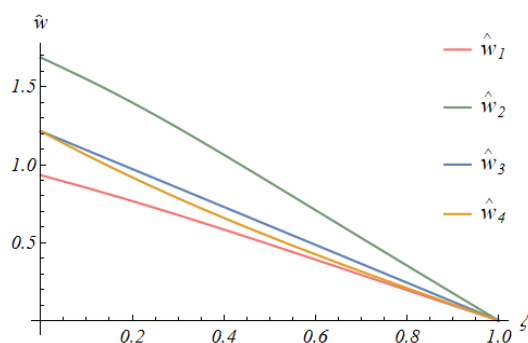
Rys.7.40. Wykres  $\hat{w}(0, \zeta)$  dla  $\lambda=5, v_1=0, \alpha=1/2, \beta=1, \gamma=1/2$ .



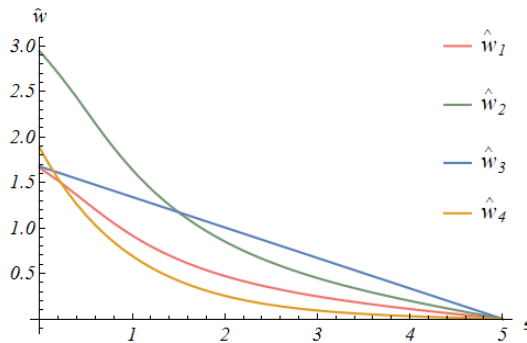
Rys.7.41. Wykres  $\hat{w}(0, \zeta)$  dla  $\lambda=1, v_1=0, \alpha=2, \beta=1, \gamma=2$ .



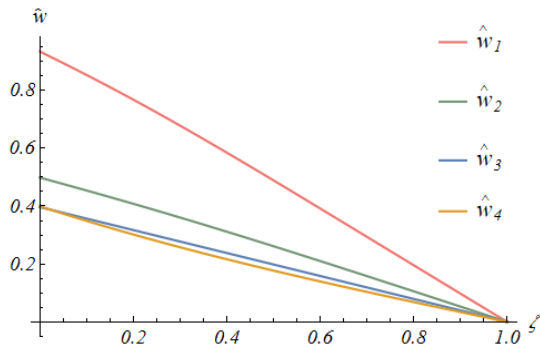
Rys.7.42. Wykres  $\hat{w}(0, \zeta)$  dla  $\lambda=5, v_1=0, \alpha=2, \beta=1, \gamma=2$ .



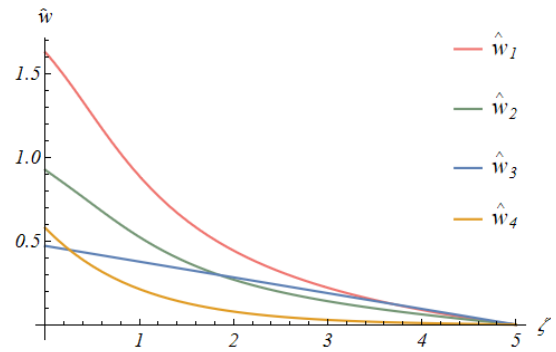
Rys.7.43. Wykres  $\hat{w}(0, \zeta)$  dla  $\lambda=1, v_1=1/4, \alpha=1/2, \beta=1, \gamma=1/2$ .



Rys.7.44. Wykres  $\hat{w}(0, \zeta)$  dla  $\lambda=5, v_1=1/4, \alpha=1/2, \beta=1, \gamma=1/2$ .

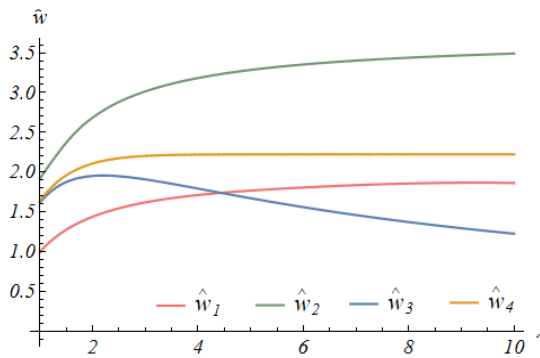


Rys.7.7.45 Wykres  $\hat{w}(0, \zeta)$  dla  $\lambda=1, v_1=1/4, \alpha=2, \beta=1, \gamma=2$ .

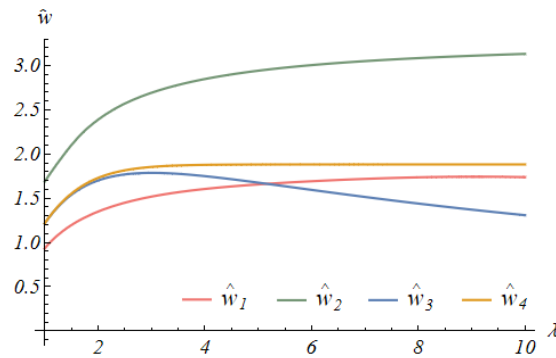


Rys.7.7.46. Wykres  $\hat{w}(0, \zeta)$  dla  $\lambda=5, v_1=1/4, \alpha=2, \beta=1, \gamma=2$ .

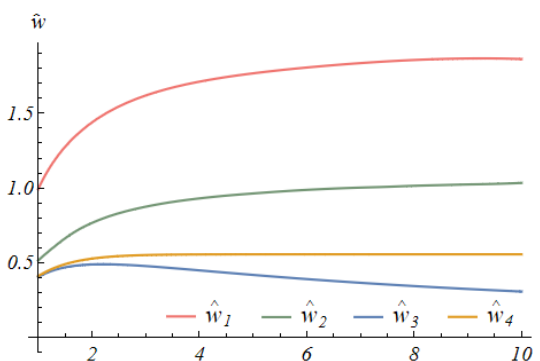
Na rys.7.47-7.50 przedstawiono porównawcze wykresy zależności od  $\lambda$  maksymalnych przemieszczeń pionowych  $\hat{w}(0, 0, \lambda)$  od  $\lambda$ , otrzymane według teorii sprężystości oraz według zmodyfikowanego modelu podłoża (6.36).



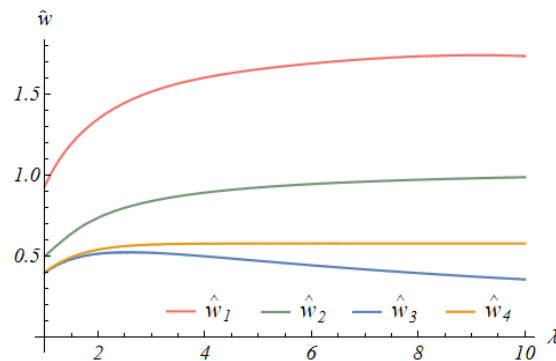
Rys.7.47. Wykres  $\hat{w}(0, 0, \lambda)$  dla  $v_1=0, \alpha=1/2, \beta=1, \gamma=1/2$ .



Rys.7.48. Wykres  $\hat{w}(0, 0, \lambda)$  dla  $v_1=1/4, \alpha=1/2, \beta=1, \gamma=1/2$ .



Rys.7.49. Wykres  $\hat{w}(0, 0, \lambda)$  dla  $v_1=0, \alpha=2, \beta=1, \gamma=2$ .



Rys.7.50. Wykres  $\hat{w}(0, 0, \lambda)$  dla  $v_1=1/4, \alpha=2, \beta=1, \gamma=2$ .

Z rys.7.47-7.50 wynika, że wraz ze wzrostem miąższości warstwy, przy przyjęciu liniowej funkcji aproksymującej, przemieszczenia pionowe dążą do zera, natomiast w przypadku przyjęcia hiperbolicznej funkcji zanikania, przemieszczenia pionowe

szybko stabilizują się. Ze zwiększeniem  $\lambda$  wzrasta różnica pomiędzy rozwiązaniem ścisłym według teorii sprężystości a zmodyfikowanym modelem podłoża.

#### 7.4 Warstwa o zmiennej sztywności po głębokości

W przypadku warstwy (lub układu warstw) poprzecznie izotropowej, parametry materiałowe mogą zależeć od zmiennej  $z$  (patrz zależności (6.8)). Równanie niejednorodnego względem zmiennej  $z$ , poprzecznie izotropowego, dwuparametrowego modelu podłoża podano wzorem (6.36), w którym parametry całkowite  $k_1$  i  $k_2$  są podane wzorem (6.37). Charakterystykę materiałową  $C_{33}(z)$ , znajdującą się pod znakiem całki we wzorach (6.37), zapiszemy następująco (patrz podrozdział 6.2, wzór (6.2)):

$$C_{33} = -\frac{(1-\nu_1)E_3^2}{2E_1\nu_3^2 - (1-\nu_1)E_3}. \quad (7.44)$$

Przyjmując zależność

$$E_1(z) = E_{10}\varphi(z), \quad (7.45)$$

gdzie  $\varphi(z)$  – funkcja zmienności modułu  $E_1(z)$  po głębokości, wyrazimy pozostałe moduły w zależności od  $E_1(z)$  następująco:

$$G_1(z) = \frac{E_{10}\varphi(z)}{2(1+\nu_1)}, \quad E_3(z) = \alpha E_1 = \alpha E_{10}\varphi(z), \quad (7.46)$$

$$\nu_3 = \beta\nu_1, \quad G_3(z) = \gamma G_1 = G_{30}\varphi(z),$$

gdzie:

$$G_{30} = \frac{E_{10}\gamma}{2(1+\nu_1)},$$

$\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  – współczynniki proporcjonalności odpowiednio pomiędzy  $E_1(0)$  i  $E_3(0)$ ,  $\nu_1$  i  $\nu_3$  oraz  $G_1(0)$  i  $G_3(0)$ .

Założenia (7.46) charakteryzują się tym, że moduły Younga  $E_1$  i  $E_3$  oraz moduły Kirchhoffa  $G_1$  i  $G_3$  są jednakowo zmienne po głębokości rozpatrywanej warstwy, natomiast współczynniki Poissona  $\nu_1$  i  $\nu_3$  są stałe na całej miąższości warstwy.

Uwzględniając założenia (7.46), parametry materiałowe (7.44) zapiszemy w postaci

$$C_{33} = C_{330}\varphi(z) = \frac{E_{10}(1-\nu_1)\alpha^2}{\alpha(1-\nu_1) - 2\beta^2\nu_1^2} \varphi(z). \quad (7.47)$$

Przyjmując funkcję zmienności modułu  $E_1(z)$  po głębokości warstwy oraz funkcje zanikania przemieszczeń, ze wzorów (6.37) wyznaczmy parametry całkowe  $k_1$  i  $k_2$ . Zauważmy, że w przypadku podłoża wielowarstwowego, składającego się z  $n$  warstw, funkcja  $\varphi(z)$ , w ogólnym przypadku, może być różna dla każdej warstwy, a obszar całkowania współczynników  $k_1$  i  $k_2$   $(0, H)$  należy podzielić na  $n$  podobszarów, gdzie  $H = \sum_{i=1}^n h_i$ . Uwzględniając (7.46) i (7.47), parametry  $k_1$  i  $k_2$ , w przypadku podłoża wielowarstwowego, zapiszemy następująco:

$$k_1 = C_{330} \sum_{i=1}^n \int_{h_{i-1}}^{h_i} \varphi_i \left( \frac{d\psi_i}{dz} \right)^2 dz, \quad k_2 = G_{30} \int_{h_{i-1}}^{h_i} \varphi_i \psi_i^2 dz, \quad (7.48)$$

gdzie  $h_0=0$ .

W przypadku różnej funkcji zanikania  $\psi(z)$  dla każdej warstwy należy spełnić warunek ciągłości funkcji  $\psi(z)$  na granicy warstw:

$$\psi_i \Big|_{z \rightarrow z_i} = \psi_{i+1} \Big|_{z \rightarrow z_i}. \quad (7.49)$$

Jako przykład rozpatrzmy zagadnienie obciążenia na powierzchni w kształcie koła o promieniu  $a$ , działającego na warstwę sprężystą, w której sztywność jest stała po głębokości, zmienna liniowo, a także na układ dwóch warstw o skokowo zmiennej sztywności (rys.7.52-7.52). Rozwiązanie tego zagadnienia przedstawiono w podrozdziale 5.2. W tym przypadku zmianie ulegną jedynie parametry całkowe  $k_1$  i  $k_2$ , które wyznaczmy ze wzorów (7.48).

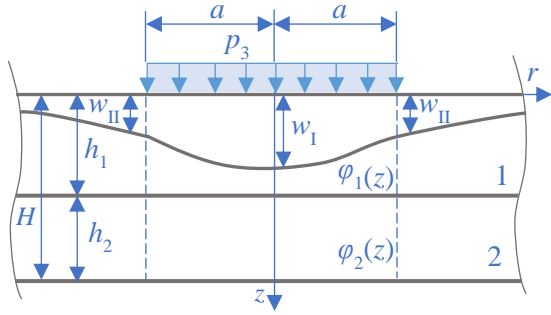
Funkcję zanikania przemieszczeń przyjmujemy w postaci (4.26)<sub>1,2</sub>. Dodatkowo założymy, że są one takie same na całej głębokości rozpatrywanej warstwy  $H=h_1+h_2$ . Natomiast funkcje zmienności sztywności po głębokości warstwy  $\varphi_i(z)$  przyjmujemy jako trzy poniższe zależności (rys.7.52<sup>77)</sup>):

$$\varphi_1 = 1, \quad \varphi_2 = 1 + \frac{z}{H}, \quad \varphi_3 = \hat{H}(z) + \hat{H}(z - h_1), \quad (7.50)$$

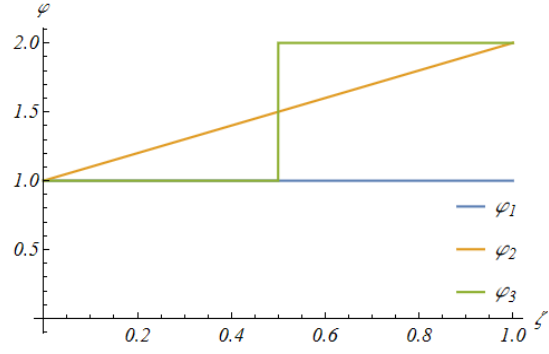
gdzie  $\hat{H}(z)$  jest funkcją Heaviside'a.

---

<sup>77)</sup> Zastosowano układ współrzędnych bezwymiarowych (7.51).



Rys.7.51. Podłoże dwuwarstwowe.



Rys.7.52. Wykres  $\varphi_i$  dla  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2$ .

Wprowadzając układ współrzędnych bezwymiarowych

$$r = \rho a, \quad z = \zeta a, \quad \lambda_1 = \frac{h_1}{a}, \quad \lambda_2 = \frac{h_2}{a}, \quad \lambda = \lambda_1 + \lambda_2, \quad (7.51)$$

wyznamy parametry całkowe  $k_1$  i  $k_2$  dla przyjętych funkcji  $\psi(z)$  oraz  $\varphi(z)$ :

1) dla liniowej funkcji  $\psi(z)$  przyjętej w postaci (4.26)<sub>1</sub> oraz  $\varphi(z)=\varphi_1$

$$k_1 = aC_{330} \int_0^\lambda \varphi_1 \left( \frac{1}{a} \frac{d\psi_1}{d\zeta} \right)^2 d\zeta = \frac{E_{10} (1-\nu_1) \alpha^2}{a\lambda [\alpha(1-\nu_1) - 2\beta^2 \nu_1^2]}, \quad (7.52)$$

$$k_2 = aG_{30} \int_0^\lambda \varphi_1 \psi_1^2 d\zeta = a\lambda \gamma \frac{E_{10}}{6(1+\nu_1)};$$

2) dla liniowej funkcji  $\psi(z)$  przyjętej w postaci (4.26)<sub>1</sub> oraz  $\varphi(z)=\varphi_2$

$$k_1 = aC_{330} \int_0^\lambda \varphi_2 \left( \frac{1}{a} \frac{d\psi_1}{d\zeta} \right)^2 d\zeta = \frac{3E_{10} (1-\nu_1) \alpha^2}{2a\lambda [\alpha(1-\nu_1) - 2\beta^2 \nu_1^2]}, \quad (7.53)$$

$$k_2 = aG_{30} \int_0^\lambda \varphi_2 \psi_1^2 d\zeta = \frac{5a\lambda \gamma}{24} \frac{E_{10}}{1+\nu_1};$$

3) dla liniowej funkcji  $\psi(z)$  przyjętej w postaci (4.26)<sub>1</sub> oraz  $\varphi(z)=\varphi_3$

$$k_1 = aC_{330} \left( \int_0^{\lambda_1} \varphi_3 \left( \frac{1}{a} \frac{d\psi_1}{d\zeta} \right)^2 d\zeta + \int_{\lambda_1}^\lambda \varphi_3 \left( \frac{1}{a} \frac{d\psi_1}{d\zeta} \right)^2 d\zeta \right) =$$

$$= \frac{\alpha^2 E_{10} (1-\nu_1) \left[ (\lambda - \lambda_1) (2\hat{\theta}(\lambda - \lambda_1) + \hat{\theta}(\lambda_1 - \lambda)) + \lambda_1 \right]}{a\lambda^2 [\alpha(1-\nu_1) - 2\beta^2 \nu_1^2]}, \quad (7.54)$$

$$k_2 = aG_{30} \left( \int_0^{\lambda_1} \varphi_3 \psi_1^2 d\zeta + \int_{\lambda_1}^\lambda \varphi_3 \psi_1^2 d\zeta \right) =$$

$$= \frac{a\gamma E_{10} \left[ (\lambda - \lambda_1)^3 (2\hat{\theta}(\lambda - \lambda_1) + \theta(\lambda_1 - \lambda)) + \lambda_1 (3\lambda^2 - 3\lambda_1 \lambda + \lambda_1^2) \right]}{6\lambda^2 (1+\nu_1)};$$



4) dla hiperbolicznej funkcji  $\psi(z)$  przyjętej w postaci (4.26)<sub>2</sub> oraz  $\varphi(z)=\varphi_1$

$$\begin{aligned}
 k_1 &= aC_{330} \int_0^\lambda \varphi_1 \left( \frac{1}{a} \frac{d\psi_2}{d\zeta} \right)^2 d\zeta = \\
 &= \frac{\alpha^2 E_{10} (1-\nu_1) \operatorname{csch}(\lambda) [\cosh(\lambda) + \lambda \operatorname{csch}(\lambda)]}{2a [\alpha(1-\nu_1) 2\beta^2 \nu_1^2]}, \\
 k_2 &= aG_{30} \int_0^\lambda \varphi_1 \psi_2^2 d\zeta = \frac{a\gamma E_{10} [\coth(\lambda) - \lambda \operatorname{csch}^2(\lambda)]}{4(1+\nu_1)};
 \end{aligned} \tag{7.55}$$

5) dla hiperbolicznej funkcji  $\psi(z)$  przyjętej w postaci (4.26)<sub>2</sub> oraz  $\varphi(z)=\varphi_2$

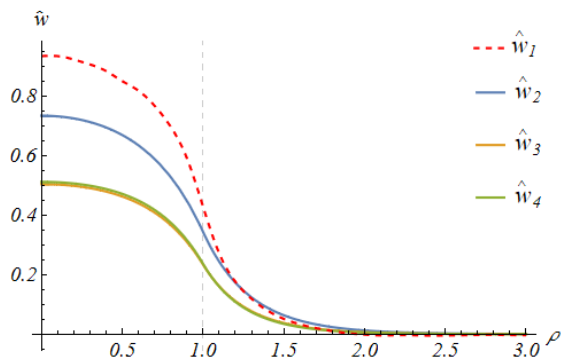
$$\begin{aligned}
 k_1 &= aC_{330} \int_0^\lambda \varphi_2 \left( \frac{1}{a} \frac{d\psi_2}{d\zeta} \right)^2 d\zeta = \\
 &= \frac{\alpha^2 E_{10} (1-\nu_1) \operatorname{csch}^2(\lambda) [6\lambda^2 + 2\lambda \sinh(2\lambda) + \cosh(2\lambda) - 1]}{8a\lambda [\alpha(1-\nu_1) - 2\beta^2 \nu_1^2]}, \\
 k_2 &= aG_{30} \int_0^\lambda \varphi_2 \psi_2^2 d\zeta = \frac{a\gamma E_{10} [2\lambda \coth(\lambda) - 3\lambda^2 \operatorname{csch}^2(\lambda) + 1]}{8\lambda(1+\nu_1)};
 \end{aligned} \tag{7.56}$$

6) dla hiperbolicznej funkcji  $\psi(z)$  oraz  $\varphi(z)=\varphi_3$  – ze względu na skomplikowaną postać parametrów  $k_1$  i  $k_2$  w tym przypadku nie podajemy ich w tej pracy.

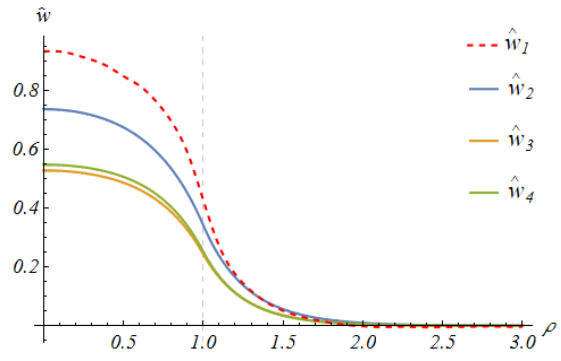
Na rys.7.53-7.54 przedstawiono wykresy przemieszczeń pionowych  $\hat{w}(\rho, 0)$  układu dwu warstw izotropowych ( $\alpha=1, \beta=1, \gamma=1$ ) przy założeniu liniowej i hiperbolicznej funkcji zanikania przemieszczeń (4.26)<sub>1,2</sub>, a także stałej, liniowej oraz skokowo zmiennej sztywności po głębokości (7.50)<sub>1,2,3</sub>. Na poniższych rysunkach przyjęto następujące oznaczenia<sup>78/</sup>:

- 1)  $\hat{w}_1$  – przemieszczenia układu dwu warstw izotropowych według rozwiązania ścisłego teorii sprężystości (patrz podrozdział 3.3.4);
- 2)  $\hat{w}_2$  – przemieszczenia warstwy według zmodyfikowanego modelu podłoża przy założeniu stałej sztywności po głębokości warstwy  $\varphi_1$  w postaci (7.50)<sub>1</sub>;
- 3)  $\hat{w}_3$  – przemieszczenia warstwy według zmodyfikowanego modelu podłoża przy założeniu liniowo zmiennej sztywności po głębokości warstwy  $\varphi_2$  w postaci (7.50)<sub>2</sub>;
- 4)  $\hat{w}_4$  – przemieszczenia warstwy według zmodyfikowanego modelu podłoża przy założeniu skokowo zmiennej sztywności po głębokości warstwy  $\varphi_3$  w postaci (7.50)<sub>3</sub>.

<sup>78/</sup> Oznaczenia dotyczą rys.7.53-7.54.



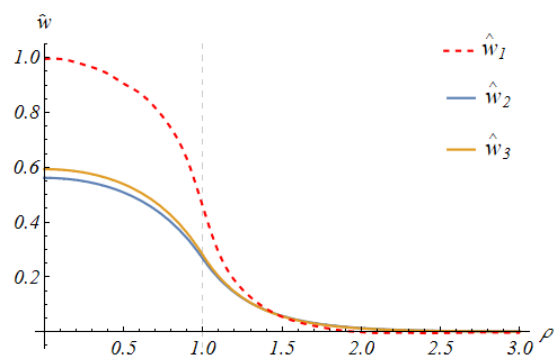
Rys.7.53. Wykres  $\hat{w}(\rho, 0)$  dla  $\hat{\psi}_1$ ,  $\nu_1=1/4$ ,  $\lambda_1=1/2$ ,  $\lambda_2=1/2$ .



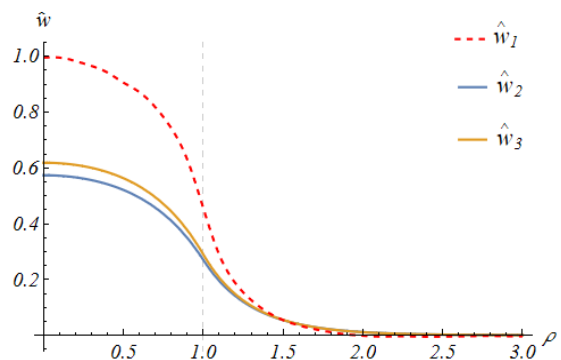
Rys.7.54. Wykres  $\hat{w}(\rho, 0)$  dla  $\hat{\psi}_1$ ,  $\nu_1=1/4$ ,  $\lambda_1=1/2$ ,  $\lambda_2=1/2$ .

Na rys.7.55-7.60 przedstawiono wykresy przemieszczeń pionowych  $\hat{w}(\rho, 0)$  układu dwu warstw izotropowych ( $\alpha=1$ ,  $\beta=1$ ,  $\gamma=1$ ), przy założeniu stałej, liniowej i skokowo zmiennej sztywności po głębokości warstwy (7.50)<sub>1,2,3</sub>. Na poniższych rysunkach przyjęto następujące oznaczenia<sup>79</sup>:

- 1)  $\hat{w}_1$  – przemieszczenia układu dwu warstw izotropowych według rozwiązania ścisłego teorii sprężystości;
- 2)  $\hat{w}_2$  – przemieszczenia warstwy według zmodyfikowanego modelu podłoża dla liniowej funkcji zanikania przemieszczeń (4.26)<sub>1</sub>;
- 3)  $\hat{w}_3$  – przemieszczenia warstwy według zmodyfikowanego modelu podłoża dla hiperbolicznej funkcji zanikania przemieszczeń (4.26)<sub>2</sub>.

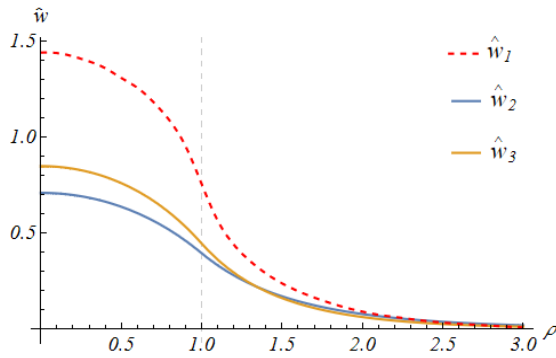


Rys.7.55. Wykres  $\hat{w}(\rho, 0)$  dla  $\varphi_2$ ,  $\nu_1=0$ ,  $\lambda_1=1/2$ ,  $\lambda_2=1/2$ .

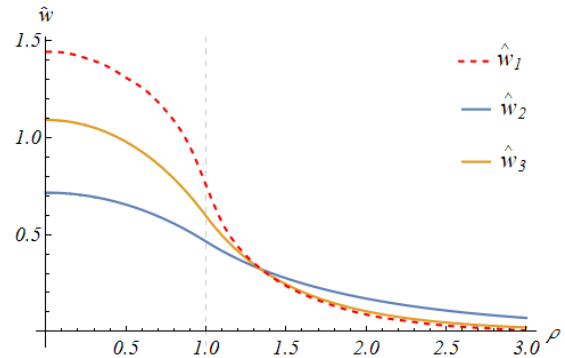


Rys.7.56. Wykres  $\hat{w}(\rho, 0)$  dla  $\varphi_3$ ,  $\nu_1=0$ ,  $\lambda_1=1/2$ ,  $\lambda_2=1/2$ .

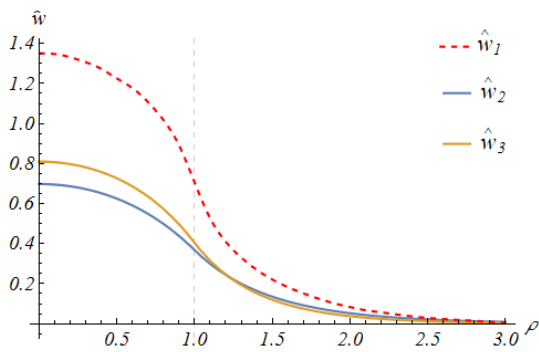
<sup>79</sup>/ Oznaczenia dotyczą rys.7.55-7.60.



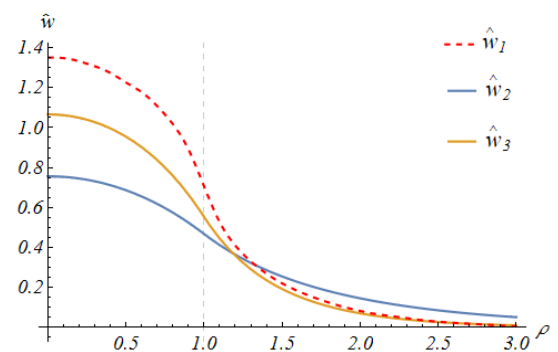
Rys.7.57. Wykres  $\hat{w}(\rho, 0)$  dla  $\varphi_2$ ,  $\nu_1=0$ ,  $\lambda_1=1$ ,  $\lambda_2=1$ .



Rys.7.58. Wykres  $\hat{w}(\rho, 0)$  dla  $\varphi_3$ ,  $\nu_1=0$ ,  $\lambda_1=1$ ,  $\lambda_2=1$ .



Rys.7.59. Wykres  $\hat{w}(\rho, 0)$  dla  $\varphi_2$ ,  $\nu_1=1/4$ ,  $\lambda_1=1$ ,  $\lambda_2=1$ .



Rys.7.60. Wykres  $\hat{w}(\rho, 0)$  dla  $\varphi_3$ ,  $\nu_1=1/4$ ,  $\lambda_1=1$ ,  $\lambda_2=1$ .

Z rys.7.53-7.60 wynika, że przemieszczenie pionowe, otrzymane według zmodyfikowanego modelu podłoża dla  $\rho > 1$  praktycznie nie różni się od rozwiązania ścisłego, w odróżnieniu od przemieszczeń w przedziale  $0 \leq \rho \leq 1$ . W przypadku skokowo zmiennej sztywności przemieszczenia pionowe są nieco większe od przemieszczeń dla liniowej zmienności sztywności po grubości warstwy, ze względu na to, że całkowita sztywność pierwszej warstwy jest większa (patrz rys.7.52). Największe przemieszczenia otrzymujemy w przypadku sztywności stałej po głębokości.

Podsumowując, zmodyfikowany dwuparametrowy model podłoża (6.36), w odróżnieniu od modelu Vlasova, można stosować w przypadku poprzecznie izotropowego podłoża sprężystego, w którym sztywność warstwy jest zmienna po głębokości. Jednak należy brać pod uwagę, że przemieszczenia według uproszczonego modelu są mniejsze od przemieszczeń otrzymanych według teorii sprężystości.

Wśród badanych funkcji zanikania, wystarczającą do zastosowań praktycznych jest hiperboliczna funkcja zanikania (4.26)<sub>2</sub>.

Jak zaznaczono w Rozdziale 6, w przypadku podłoża wielowarstwowego z warstwami o różnych sztywnościach, według modelu Vlasova trzeba rozwiązać układ

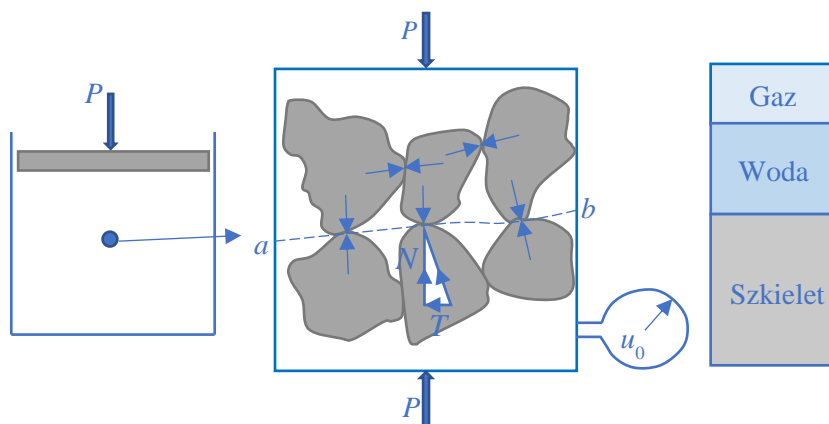
równań różniczkowych, których liczba jest równa liczbie warstw. Wraz ze wzrostem liczby warstw, rośnie trudność rozwiązywania tego układu równań. W przypadku zmodyfikowanego modelu podłoża o dwóch parametrach (6.36), w celu wyznaczenia przemieszczeń podłoża wielowarstwowego, należy tylko wyznaczyć parametry całkowite  $k_1$  i  $k_2$  dla każdej z warstw, uwzględniając warunek ciągłości funkcji  $\psi(z)$  na granicy warstw (7.49). W bardziej ogólnym przypadku zmodyfikowanego modelu podłoża (6.13) należy postępować analogicznie.

## 8. DOBÓR PARAMETRÓW SZTYWNOŚCI

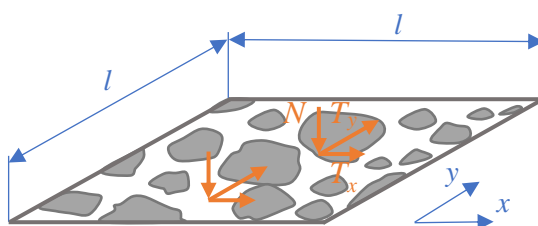
### 8.1 Czynniki określające zależność $\sigma$ - $\varepsilon$ w gruncie

Podłoże gruntowe odnosi się do materiałów rozdrobnionych. Ze względu na budowę grunt można scharakteryzować w zależności od stopnia wypełniania wodą jako ośrodek trójfazowy (ziarna i cząstki, woda, gaz) lub dwufazowy (bez fazy gazowej).

W rzeczywistości, rozpatrując masę gruntową, niemożliwe jest wyznaczenie sił w każdym pojedynczym miejscu styku. Z tego względu w zastosowaniu do gruntów wynika potrzeba wprowadzenia pojęcia naprężeń, powstających wskutek ciężaru własnego oraz sił zewnętrznych. Na ogół przyjmuje się, że ciśnienie w gruntach jest równe ciśnieniu atmosferycznemu, co powoduje, że siły  $N$  i  $T$  (rys.8.1) powstają wyłącznie z sił przenoszonych przez szkielet gruntowy [86], s. 130.



Rys.8.1 Naprężenie efektywne przenoszone przez szkielet gruntowy<sup>80/</sup>.



Rys.8.2. Określenie naprężeń w układzie cząstek<sup>81/</sup>.

Hamilton w pracy [88] zaproponował określenie naprężeń, przeprowadzając myślowo płaszczyznę przez element gruntu, która przecina szkielet i pory gruntu (rys.8.2). W każdym przekroju siłę, przenoszoną przez szkielet gruntowy, rozkłada się na składową normalną  $N$  i styczną do płaszczyzny  $T$ , przy czym składową styczną z kolei można rozłożyć na kierunki równoległe do osi współrzędnych  $T_x$  i  $T_y$ . Sumę wszystkich sił

<sup>80/</sup> Rysunek własny na podstawie prac [87] i [4], s. 27.

<sup>81/</sup> Rysunek własny na podstawie monografii [86], s. 130.

składowych normalnych podzieloną przez pole powierzchni tej płaszczyzny określa się jako naprężenie normalne, a sumę wszystkich sił składowych stycznych podzieloną przez pole powierzchni – naprężenie ścinające. Pojęcie naprężeń jest związane z ciągłością ośrodka (kontinuum).

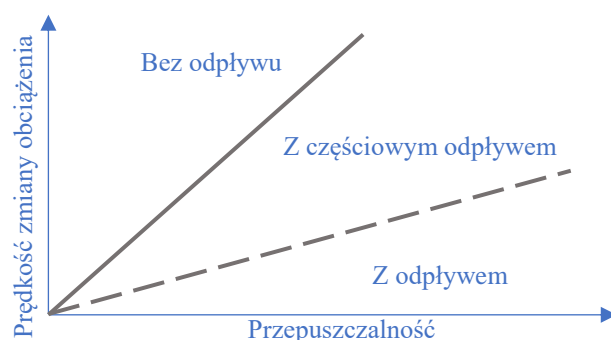
$$\sigma = \frac{\sum N}{l^2}, \quad \tau_x = \frac{\sum T_x}{l^2}, \quad \tau_y = \frac{\sum T_y}{l^2}. \quad (8.1)$$

Przy obciążeniu ośrodka gruntowego rozdział obciążenia przypadającego na poszczególne fazy będzie różny. W przypadku wypełnienia wodą por gruntowych, obciążenia będą przenoszone przez wodę. Wraz ze wzrostem ciśnienia wody w porach wzrasta gradient ciśnienia, co powoduje stopniowe rozpraszanie nadwyżki ciśnienia. W procesie odpływu wody obciążenie będzie przekazywane na szkielet gruntowy co powoduje zagęszczenie oraz zmianę właściwości gruntu (porowatości, gęstości objętościowej, wytrzymałości na ściskanie, modułów ściśliwości). W celu opisu tego zjawiska wprowadzono pojęcie naprężeń efektywnych, tj. jednostkową wielkość obciążenia przypadającą na szkielet gruntowy. Zgodnie z Terzaghim [89] naprężenia efektywne można określić jako różnicę naprężenia całkowitego i ciśnienia wody w porach gruntowych

$$\sigma' = \sigma - u, \quad (8.2)$$

gdzie:  $\sigma'$  – naprężenia efektywne,  $\sigma$  – naprężenia całkowite,  $u$  – ciśnienie wody w porach.

Ciśnienie wody w porach w ośrodku gruntowym określa się poprzez intensywność obciążenia i możliwość odpływu wody z porów, co określa z kolei warunki odpływu [4], s. 27-28. Na rys.8.3 przedstawiono schemat powstawania warunków odpływu.

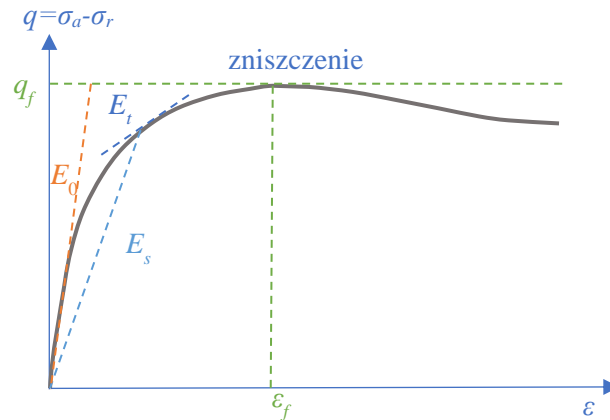


Rys.8.3. Czynniki określające warunki odpływu<sup>82/</sup>.

Podłoże gruntowe jest bardzo skomplikowanym układem mechanicznym i odnosi się do ciał fizycznie nieliniowych. Związki pomiędzy naprężeniami a odkształceniami

<sup>82/</sup> Rysunek własny na podstawie monografii [4], s. 28.

w gruntach można określić na podstawie badań laboratoryjnych. Na rys.8.4 przedstawiono charakterystyki sztywności gruntu opisywane modułami, wśród których w zależności od zakresu odkształceń można wyróżnić:  $E_0$  – moduł odkształcenia początkowego,  $E_s$  – moduł odkształcenia sieczny,  $E_t$  – moduł odkształcenia styczny.



Rys.8.4. Moduły wyróżnione na podstawie charakterystyki  $\sigma$ - $\epsilon$  z badania trójosiowego<sup>83/</sup>.

Nieliniowa zależność  $\sigma$ - $\epsilon$ , w przypadku ośrodka gruntowego, jest postaci

$$\sigma = E(\epsilon) \epsilon . \quad (8.3)$$

## 8.2 Sztywność początkowa gruntu

Od lat 60. XX wieku przy badaniu prędkości rozchodzenia się fal w gruntach niespoistych zauważono, że wartości modułu obliczone na podstawie pomiaru prędkości fali są większe niż pomierzone bezpośrednio w edometrze [86], s. 196. Interpretowano to przede wszystkim tym, że naprężenia związane z falą sejsmiczną wywołują bardzo małe, sprężyste odkształcenia ziaren. Natomiast w badaniu edometrycznym naprężenia wywołują duże odkształcenia, co powoduje poślizg między ziarnami.

Obecnie szeroko stosowane są metody geofizyczne do rozpoznania warunków podłoża gruntowego. Sztywność początkową gruntu można określić przede wszystkim za pomocą pomiaru prędkości fali poprzecznej. Odkształcenia, wywołane odpowiednim pomiarem są na tyle małe, że materiał zachowuje się sprężysto i do opisu takiego ośrodka możemy zastosować zależności liniowej teorii sprężystości.

Określenie sztywności początkowej gruntu na podstawie pomiaru prędkości fali poprzecznej stało możliwe od lat sześćdziesiątych. Przede wszystkim jest to związane z rozwojem techniki komputerowej oraz narzędzi pomiarowych. Jakość pomiarów

<sup>83/</sup> Rysunek własny na podstawie pracy [90].

prędkości fali znacznie się polepszyła od lat 80-ch dzięki zastosowaniu piezoelementu typu *bender*<sup>84</sup>/ oraz rozwojem metod identyfikacji sygnału odbiorczego. Pomiar prędkości fali poprzecznej można wykonywać zarówno w laboratorium, jak i w terenie.

Sztywność początkowa gruntu wyznacza się za pomocą pomiarów prędkości fali poprzecznej w badanej próbce zgodnie ze wzorem [4], s. 53, [11], s. 491

$$G = \rho V_s^2, \quad (8.4)$$

gdzie:

$G$  – moduł odkształcenia postaciowego,

$\rho$  – gęstość objętościowa badanego ośrodka,

$V_s$  – prędkość fali poprzecznej.

Na prędkość propagacji fali bardziej lub mniej wpływają następujące czynniki: rodzaj i struktura gruntu, wielkość ziaren, naprężenia efektywne, wskaźnik plastyczności, historia stanu naprężenia, temperatura, wilgotność [91], [92], [93], [94]. Natomiast, jak podają Tatsuoka i Shibuya w pracy [95], sztywność początkowa gruntu nie zależy od rodzaju badania (dynamicznego lub statycznego) ze względu na to, że grunt, w obu przypadkach, zachowuje się jednakowo w zakresie odkształceń sprężystych. Również niewielki wpływ na sztywność początkową mają warunki odpływu wody z porów, ponieważ nie generuje się nadwyżka ciśnienia wody w porach  $\Delta u$  [4], s. 176-177.

W literaturze dotyczącej przedmiotu możemy także znaleźć zależności empiryczne, określające prędkości propagacji fali, w których najczęściej uwzględniają następujące czynniki wpływające na prędkość: naprężenie efektywne, wskaźnik porowatości i wskaźnik prekonsolidacji ([91], [96]). Czynniki te mają różną wagę w zależności od rodzaju gruntu.

Roesler w pracy [97] wykazał, że fala poprzeczna wywołuje odkształcenie tylko w kierunku propagacji i polaryzacji fali zgodnie z równaniem

$$V_s = (m_1 - m_2 e) (\sigma_a')^{m_a} (\sigma_{pf}')^{m_p}, \quad (8.5)$$

gdzie:

$e$  – wskaźnik porowatości,

$\sigma_a'$  – naprężenie efektywne w kierunku propagacji fali,

$\sigma_{pf}'$  – naprężenie efektywne w kierunku ruchu cząsteczek ośrodka,

$m_1, m_2, m_a, m_p$  – stałe materiałowe.

---

<sup>84</sup> Przetwornik typu *bender* stosowany jest przeważnie do gruntów spoistych. Również można go zastosować w piaskach [4], s. 55.



Dla gruntów spoistych Lipiński [4], s. 196-201, na podstawie badań prekonsolidowanych gruntów spoistych o nienaruszonej strukturze pobranych w różnych regionach Polski, zaproponował następującą formułę pozwalającą na oszacowanie sztywności początkowej

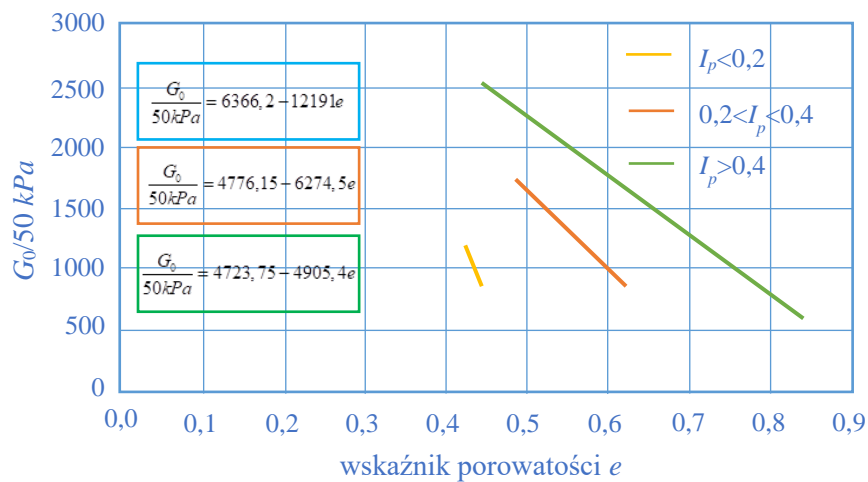
$$G_0 = G_{50} + 41I_p^{-1,57} (p' - 50), \quad (8.6)$$

gdzie:

$p'$  – średnie naprężenie efektywne, [kPa],

$I_p$  – wskaźnik plastyczności gruntu, [-],

$G_{50}$  – znormalizowany dla 50 kPa moduł  $G_0$  (rys.8.5).



Rys.8.5. Zależność modułu  $G_{50}$  od wskaźnika porowatości i zakresu wskaźnika plastyczności  $I_p$ <sup>85/</sup>.

Dla prekonsolidowanych gruntów spoistych moduł sprężystości poprzecznej  $G_0$  można oszacować na podstawie znajomości średniego naprężenia efektywnego  $p'$ , wskaźnika plastyczności  $I_p$  i wskaźnika porowatości  $e$ .

### 8.3 Nieliniowy rozkład sztywności gruntu

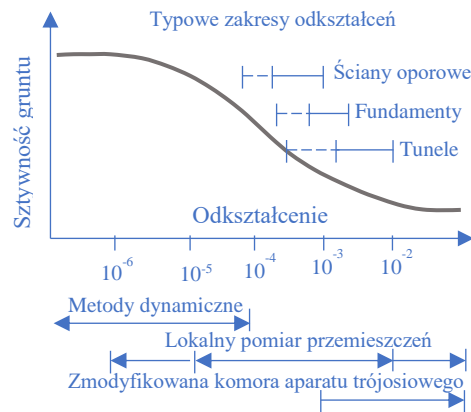
#### 8.3.1 Nieliniowy rozkład charakterystyki $\sigma$ - $\varepsilon$

Od połowy lat 80-tych XX wieku, wraz z rozwojem techniki komputerowej oraz narzędzi pomiarowych wykazano, że sztywność gruntu nieliniowo zależy od odkształceń. Jak podają Jardine i in. w pracy [98], największa nieliniowość występuje w zakresie małych i średnich odkształceń, czyli mniejszych od  $10^{-3}$  (rys.8.6). W wyniku badań

<sup>85/</sup> Rysunek własny na podstawie monografii [4], s. 201.

stwierdzono, że maksymalne odkształcenie, przy którym grunt zachowuje się sprężysto jest bardzo małe.

Na nieliniowość rozkładu sztywności silny wpływ mają wielkości naprężeń i odkształceń oraz rodzaj gruntu. W mniejszym stopniu wpływają takie czynniki jak: historia stanu naprężenia, prędkość obciążenia, struktura [4], s. 202.

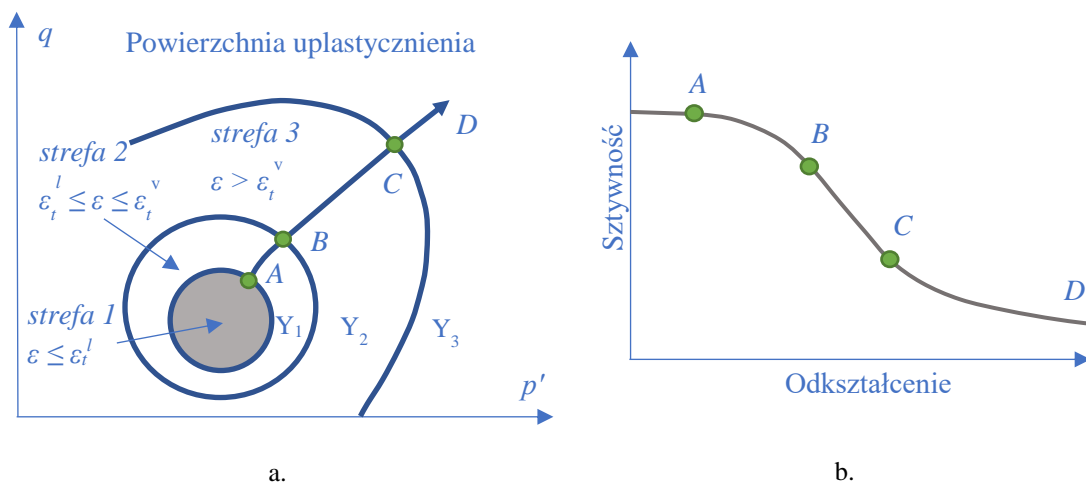


Rys.8.6. Możliwości aparaturowe określenia sztywności gruntu ze względu na zakres odkształcenia<sup>86/</sup>.

Eksperymentalnie stwierdzono istnienie progów odkształcenia liniowego i objętościowego, zależące między innymi od: rodzaju gruntu, reprezentowanego wskaźnikiem plastyczności  $I_p$ , wskaźnika prekonsolidacji  $OCR$  i wartości średniego naprężenia efektywnego  $p'$ .

Hipoteza, dotycząca nieliniowego związku pomiędzy naprężeniami a odkształceniami w zakresie małych odkształceń, została przedstawiona przez Jardina [101], Highta i Higinasa [102] i in. Zgodnie z tą koncepcją, charakterystyczne zmiany sztywności gruntu dzielą przestrzeń naprężeń na strefy odpowiadające liniowej sprężystości ( $Y_1$ ), nieliniowej, ale odwracalnej charakterystyce naprężenie-odkształcenie ( $Y_2$ ) oraz strefę występowania odkształceń plastycznych ( $Y_3$ ) (rys.8.7a). Identyfikacja tych stref opiera się na precyzyjnym pomiarze liniowych i objętościowych odkształceń [4], s. 229-230.

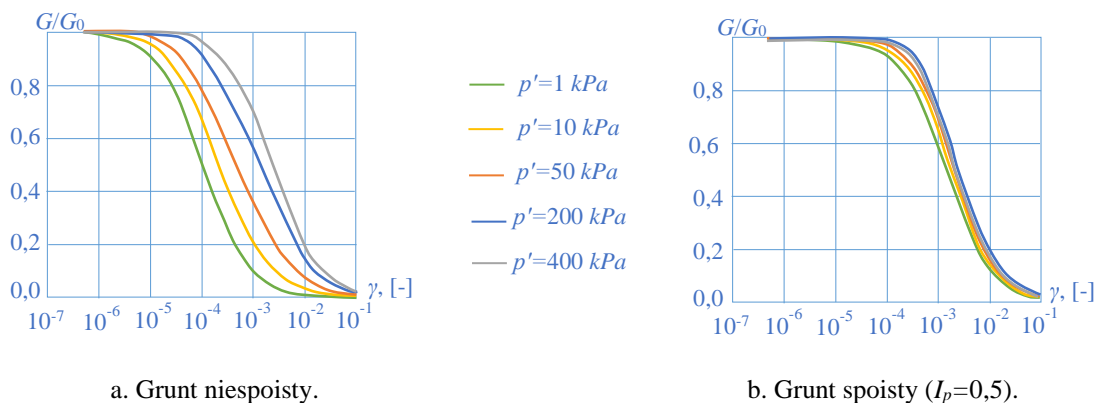
<sup>86/</sup> Rysunek własny na podstawie prac [99], [100], [4], s. 203.



Rys.8.7. Schemat koncepcji hipotezy nieliniowości związku  $\sigma$ - $\varepsilon$  <sup>87/</sup>.

### 8.3.2 Uwarunkowania rozkładu sztywności w zakresie małych i średnich odkształceń

W przypadku gruntów niespoistych decydujący wpływ na rozkład sztywności w zakresie małych i średnich odkształceń ma wielkość naprężenia efektywnego (rys.8.8a).



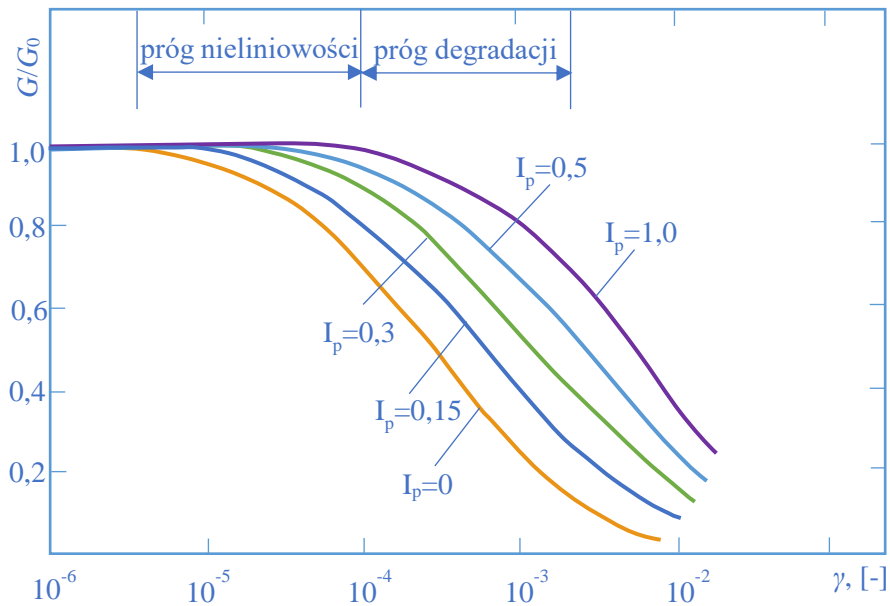
Rys.8.8. Wpływ naprężeń efektywnych na rozkład sztywności <sup>88/</sup>.

Dla gruntów spoistych wielkość naprężenia efektywnego nie ma tak dużego znaczenia (rys.8.8b). W tym przypadku kluczowym parametrem jest wskaźnik plastyczności.

Analizując wiele danych doświadczalnych Vucetic i Dobry, w pracach [103] i [104], zaproponowali rodzinę uśrednionych krzywych zależności sztywności gruntu od odkształceń różnych rodzajów gruntów, reprezentowanych przez wskaźnik plastyczności (rys.8.9).

<sup>87/</sup> Rysunek własny za Jardine i in. [101], z późniejszymi modyfikacjami.

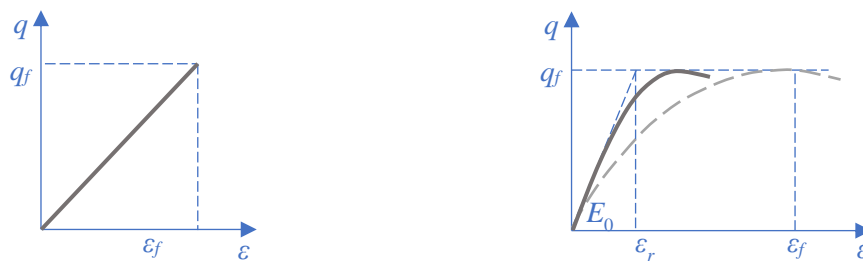
<sup>88/</sup> Rysunek własny na podstawie pracy [103].



Rys.8.9. Degradacja sztywności gruntów dla różnych wartości wskaźnika plastyczności <sup>89/</sup>.

### 8.3.3 Charakterystyki progowych stref odkształcenia

W modelu idealnie sprężystym wywołane odkształcenie jest sprężyste do momentu zniszczenia materiału, tj. w chwili zniszczenia materiału wielkość odkształcenia sprężystego jest równa odkształceniu zniszczenia (rys.8.10a). W przypadku gruntów tak nie jest, gdyż wartość odkształcenia sprężystego różni się od wartości odkształcenia przy zniszczeniu co najmniej o rząd wielkości. Materiały nieliniowe, takie jak grunt, ulegają zniszczeniu przy odkształceniach  $\varepsilon_f > \varepsilon_r$  [90].



a. Materiał idealnie sprężysto-plastyczny.

b. Materiał nieliniowy.

Rys.8.10. Wykres zależności  $\sigma$ - $\varepsilon$ <sup>90/</sup>.

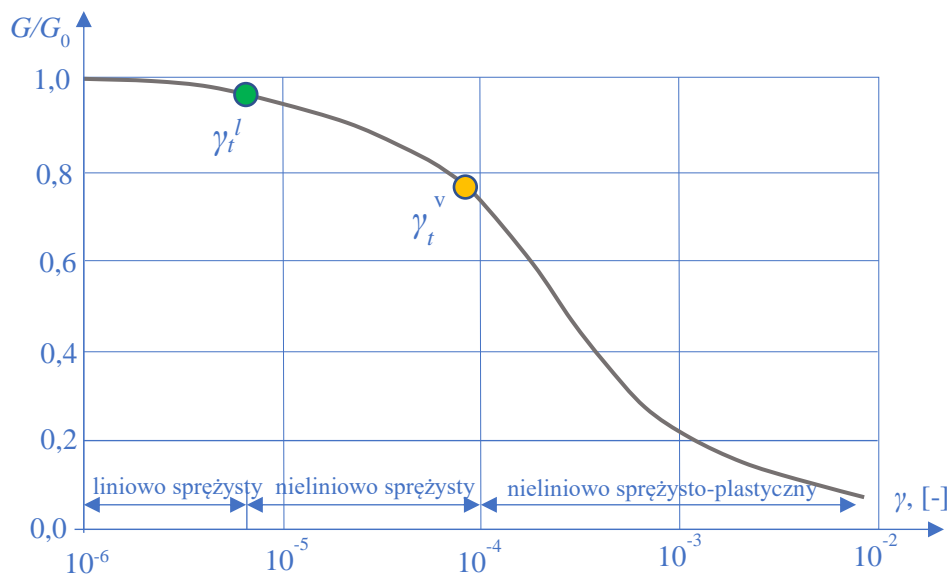
W celu modelowania nieliniowego rozkładu sztywności gruntu w zakresie małych i średnich odkształceń wprowadza się pojęcie odkształcenia referencyjnego (odniesienia)  $\varepsilon_r$ , nawiązującego do sprężystości materiału, określanego na podstawie sztywności

<sup>89/</sup> Rysunek własny na podstawie prac [103] i [105], s. 149.

<sup>90/</sup> Rysunek własny na podstawie pracy [90].

początkowej (rys.8.10b). Jest to odkształcenie odpowiadające reakcji sprężystej dla maksymalnego dewiatora stanu naprężenia.

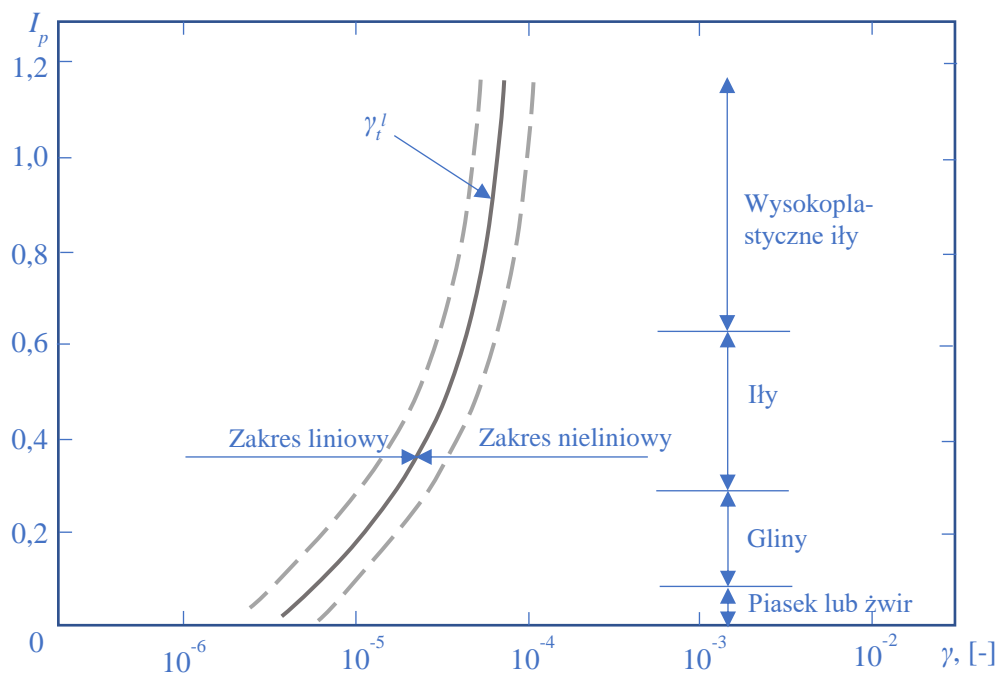
Jak zaznaczono w podpunkcie 8.3.1, strefa 1 odnosi się do zakresu sprężystego reakcji gruntu, w którym odkształcenia mają charakter odwracalny, a zakres sprężystej reakcji można odnieść do odkształceń liniowych oraz objętościowych (rys.8.11). Wyróżnia się następujące progowe wartości odkształceń: „liniowego”  $\gamma_t^l$  oraz objętościowego  $\gamma_t^v$ . Najbardziej istotne są progowe wartości, odnoszące się do reakcji sprężystej  $\gamma_t^v$  (rys.8.11).



Rys.8.11. Progowe wartości odkształcenia sprężystego<sup>91/</sup>.

Dla zakresu odkształceń odpowiadających reakcji sprężystej w gruntach spoistych Kim i Novak [107], Georgiannou i in. [108] oraz Vucietic [109] zaproponowali uśrednioną krzywą zależności progowej wartości odkształcenia postaciowego od wskaźnika plastyczności  $I_p$  (rys.8.12).

<sup>91/</sup> Rysunek własny na podstawie [106].



Rys.8.12. Zależność progowego odkształcenia postaciowego odpowiadającego reakcji sprężystej materiału od wskaźnika plastyczności <sup>92/</sup>.

## 8.4 Propozycja doboru parametrów sztywności

### 8.4.1 Równanie opisujące rozkład sztywności

W zagadnieniach praktycznych wykorzystuje się odkształcenie liniowe  $\varepsilon$ . W związku z tym istnieje potrzeba przejścia z odkształceń postaciowych na odkształcenia dewiatorowe, które jest wyrażone poprzez odkształcenia liniowe następującą zależnością [110], s. 59

$$\varepsilon_s = \frac{2}{3}(\varepsilon_1 - \varepsilon_3), \quad (8.7)$$

w której  $\varepsilon_1$  i  $\varepsilon_3$  są odkształceniami liniowymi.

Zależność pomiędzy odkształceniem dewiatorowym  $\varepsilon_s$  a postaciowym  $\gamma_{oct}$  wyraża się równaniem [110], s. 58

$$\varepsilon_s = \frac{1}{\sqrt{2}}\gamma_{oct}, \quad (8.8)$$

w którym  $\gamma_{oct}$  – odkształcenie postaciowe na płaszczyźnie oktaedrycznej.

<sup>92/</sup> Rysunek własny na podstawie monografii [105], s. 150.

Jedną z możliwych postaci rozkładu sztywności w zakresie małych i średnich odkształceń uwzględniającą fizyczne właściwości gruntu można przedstawić następującym równaniem [106]

$$\frac{E(\varepsilon)}{E_0} = \frac{c}{1 + b \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_r} \right)}, \quad (8.9)$$

w którym:

$b$  – współczynnik uwzględniający wpływ wskaźnika plastyczności w gruntach spoistych lub naprężenia efektywnego w gruntach niespoistych,

$c$  – normalizujący parametr, przy czym  $c = 1 + \frac{b}{10^6 \varepsilon_r}$ .

Odształcenia referencyjne w zależności od wskaźnika plastyczności można przyjąć następująco [106]

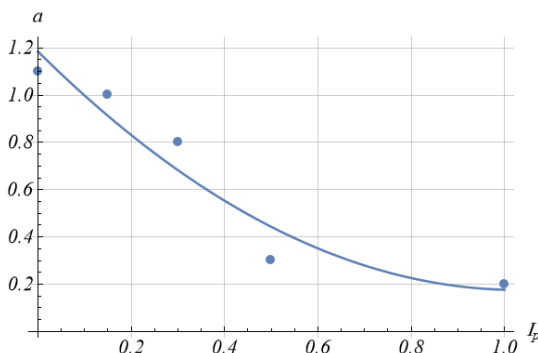
$$\varepsilon_r = \begin{cases} 2 \cdot 10^{-4}, & 0 < I_p \leq 0,02, \\ 4 \cdot 10^{-4}, & 0,1 < I_p \leq 0,25, \\ 6 \cdot 10^{-4}, & 0,25 < I_p \leq 1. \end{cases} \quad (8.10)$$

#### 8.4.2 Grunt spoisty

W przypadku gruntów spoistych, pomijając wpływem naprężeń efektywnych na rozkład sztywności, zależność parametru  $b$  od wskaźnika plastyczności gruntu  $I_p$  aproksymowano następującym wzorem<sup>93/</sup>

$$b = 1,185 - 1,959 I_p + 0,951 I_p^2. \quad (8.11)$$

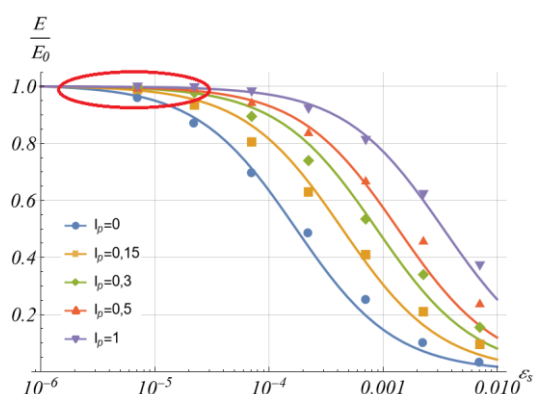
Na rys.8.13 przedstawiono zależność parametru  $b$  od wskaźnika plastyczności  $I_p$  dla ilorazu sztywności (8.9).



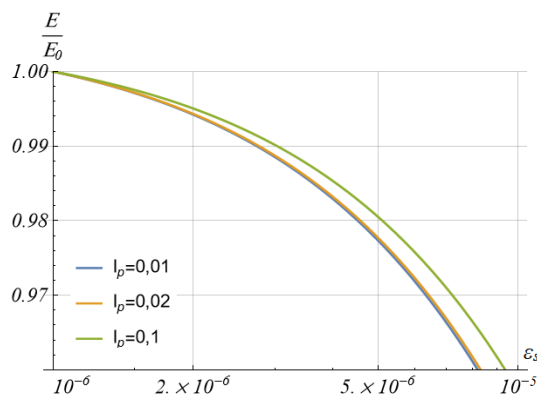
Rys.8.13. Wykres zależności parametru  $b$  od wskaźnika plastyczności  $I_p$ .

<sup>93/</sup> Autor pracy nie dysponuje dokładnymi danymi badań laboratoryjnych, lecz tylko posługuje się rysunkami dostępnymi w literaturze. Z tego względu zależność (8.11) może ulegać nieznacznej zmianie.

Na rys.8.14-8.15 przedstawiono wykres zależności  $E/E_0$  od odkształceń  $\varepsilon_s$ , sporządzony dla różnych rodzajów gruntów, charakteryzowanych wskaźnikiem plastyczności  $I_p$ .



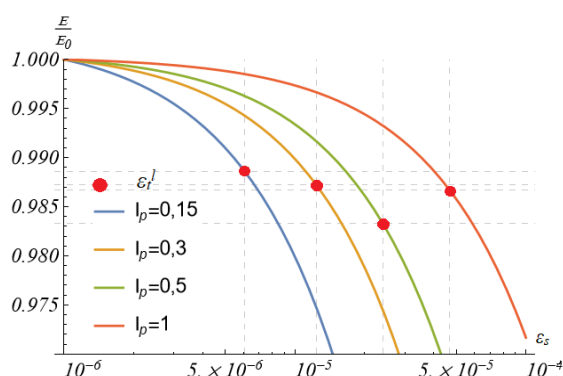
Rys.8.14. Wykres  $E/E_0$  dla gruntów o różnych wartościach wskaźnika plastyczności  $I_p$ .



Rys.8.15. Wykres  $E/E_0$  dla gruntów o małej wartości wskaźnika plastyczności  $I_p$ .

Jak wynika z rys.8.14, zależność (8.9) można przyjąć w celu aproksymacji wyników badań laboratoryjnych gruntów spoistych, przedstawionych na rys.8.9.

Na rys.8.16 przedstawiono progowe wartości odkształcenia liniowego  $\varepsilon_t^l$  dla różnych rodzajów gruntu, charakteryzowanych wskaźnikiem plastyczności  $I_p$ .



Rys.8.16. Wykres progowych wartości odkształcenia odpowiadające reakcji sprężystej.

Jak wynika z rys.8.16, ze wzrostem wskaźnika plastyczności wzrasta zakres sprężystości odkształceń liniowych  $\varepsilon_t^l$ . Ten wynik jest zgodny z rys.8.12.

### 8.4.3 Grunt niespoisty

Jak zaznaczono w podpunkcie 8.3.2, dla gruntów niespoistych decydujący wpływ na zakres sprężystości rozkładu sztywności w zakresie małych i średnich odkształceń ma średnie naprężenia efektywne (rys.8.8b). W tym przypadku parametr  $b$  uzależniono od wartości średniego naprężenia efektywnego<sup>94/</sup> (rys.8.17) następująco

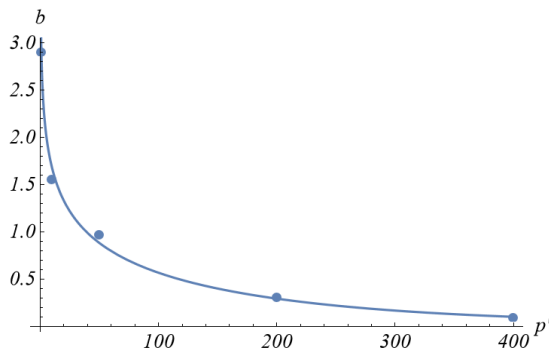
<sup>94/</sup> Wyznaczono dla odkształcenia  $\gamma_{oct}=10^{-4}$ .



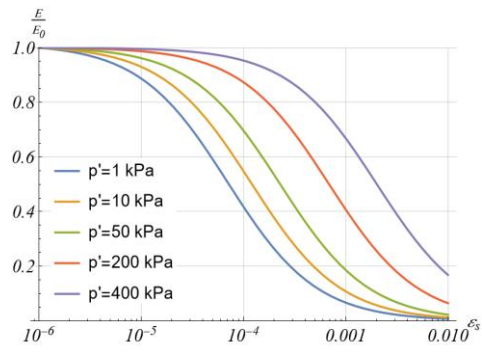
$$b = 2,85 + 0,0008\hat{p}' - 0,514\log(\hat{p}'), \quad (8.12)$$

gdzie  $\hat{p}' = \frac{p'}{p_0}$ ,  $p_0 = 1 \text{ kPa}$ .

Na rys.8.18 przedstawiono zależność ilorazu sztywności w zakresie małych i średnich odkształceń gruntów niespoistych dla różnych wartości średniego naprężenia efektywnego.



Rys.8.17. Wykres zależności  $b(p')$  dla gruntów niespoistych.

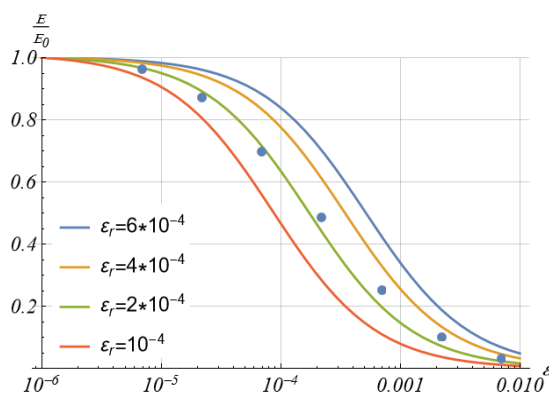


Rys.8.18. Wykres  $E/E_0$  dla różnych wartości średniego naprężenia efektywnego.

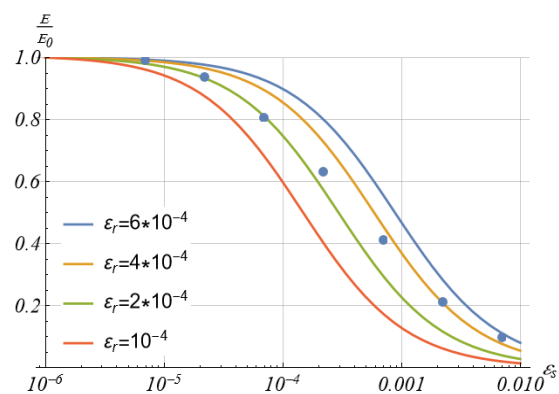
Jak wynika z rys.8.18, wartość średniego naprężenia efektywnego ma silny wpływ na zakres sprężystości ilorazu sztywności dla gruntów niespoistych. Ten wynik jest zgodny z rys.8.8a dla  $\varepsilon < 10^{-3}$ . Dla  $\varepsilon > 10^{-3}$  wyniki są zaniżone dla  $\sigma < 400 \text{ kPa}$ .

#### 8.4.4 Wpływ odkształcenia referencyjnego na rozkład sztywności gruntu

Na zakres sprężystości ilorazu sztywności również silny wpływ ma odkształcenie referencyjne. (rys.8.19).



a. dla  $I_p = 0,01$ .



b. dla  $I_p = 0,3$ .

Rys.8.19. Wpływ odkształcenia referencyjnego na zakres liniowej sprężystości ilorazu  $E/E_0$  dla  $b=1$ .

Jak wynika z rys.8.19, odkształcenie referencyjne  $\varepsilon_r$  ma znaczący wpływ na zwiększenie zakresu sprężystości rozkładu sztywności gruntów. Im większa jest wartość

$\varepsilon_r$  tym większy jest zakres sprężystości. W zagadnieniach praktycznych  $\varepsilon_r$  przyjmuje się zgodnie z (8.10).

#### 8.4.5 Dobór modułu odkształcenia

Równania modelu podłoża sprężystego (według teorii sprężystości, modelu Vlasova, zmodyfikowanego modelu) można sprowadzić do postaci

$$w(\rho) = \frac{ap}{E} \hat{w}(\rho), \quad (8.13)$$

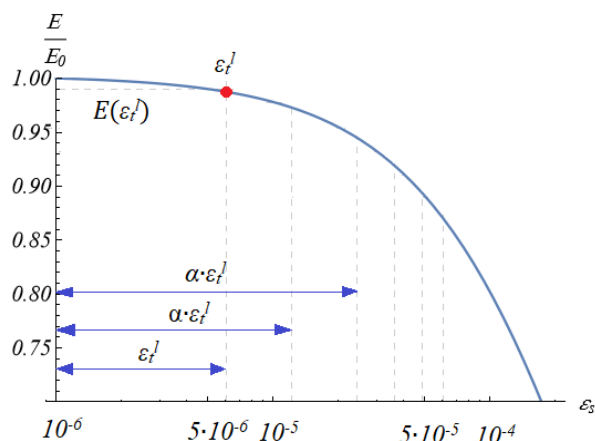
w której założono stałą sztywność podłoża ( $E=const$ ).

Zakres odkształcenia odnoszący się do warunków pracy konstrukcji, jak wynika z rys.8.6, jest rzędu  $10^{-3}$  lub mniejszy. W przypadku przyjęcia  $E=E(\varepsilon)$ , można rozpatrywać bardzo mały zakres odkształcenia, w którym można uznać, że  $E=const$ . Wyznaczając wartość moduły dla każdego tego małego zakresu ze wzoru (8.9), a następnie podstawiając do (8.13) można wyznaczyć przemieszczenia w zależności od rozpatrywanego zakresu odkształcenia.

Żeby spełnić warunek zmienności modułu odkształcenia, a jednocześnie uniknąć wprowadzenia nieliniowej zależności  $E(\varepsilon)$ , pozostając w ramach modelu liniowego, proponuje się podzielić rozpatrywany zakres odkształceń występujących w praktyce budowlanej na podzakresy, których liczba zależy od rodzaju gruntu. Dolną granicą całego zakresu jest odkształcenie  $\varepsilon_t^l$ , górną –  $\varepsilon_{max}$ . Wartością graniczną między poszczególnymi zakresami jest  $\alpha\varepsilon_t^l$ , gdzie  $\alpha=\alpha_0k$ , przy czym  $k = 1, 2, \dots, \left[ \frac{\varepsilon_{max}}{\alpha_0\varepsilon_t} \right]$ , zaś  $\alpha_0=2$  dla gruntów spoistych oraz  $\alpha_0=1,5$  dla gruntów niespoistych. Parametr  $\alpha$  zależący od rodzaju gruntu można nazwać wskaźnikiem wzrostu zakresu odkształcenia.

Biorąc pod uwagę rozkłady sztywności dla różnych gruntów określone na podstawie badań w kolumnie rezonansowej, można przyjąć, że zakres odkształceń sprężystych i pseudosprężystych  $\varepsilon_{max}$  dla gruntów niespoistych można oszacować  $10^{-6}$ - $10^{-5}$ , natomiast dla gruntów spoistych o rząd wielkości więcej, tj.  $10^{-6}$ - $10^{-4}$  [106].

Schemat wyznaczania wartości modułu przedstawiono na rys.8.20.

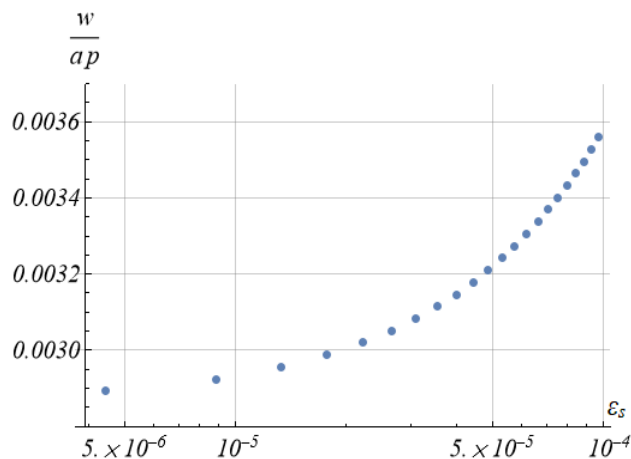


Rys.8.20. Schemat wyznaczania modułu odkształcenia w rozpatrywanym zakresie odkształcenia.

Jako przykład rozpatrzono wyznaczenie krzywej maksymalnych przemieszczeń  $w(\varepsilon)$  na podstawie przybliżonego wzoru (4.7). W tym celu przyjęto podłoże gruntowe o następujących charakterystykach:  $I_p=0,1$ ,  $e=0,43$ ,  $p'=200 \text{ kPa}$ ,  $\varepsilon_r=4 \cdot 10^{-4}$ ,  $\varepsilon_t^l=4,5 \cdot 10^{-6}$ ,  $\nu=1/4$ ,  $\lambda=5$ .

Dla przyjętych parametrów gruntu ze wzoru (8.6) można wyznaczyć sztywność początkową  $G_0=230 \text{ MPa}$ , a następnie  $E_0=2(1+\nu) G_0=575 \text{ MPa}$ .

Na rys.8.21 przedstawiono, przeskalowaną przez mnożnik  $1/ap$ , zależność maksymalnego przemieszczenia pionowego od zakresu odkształcenia.



Rys.8.21. Zależność maksymalnego przemieszczenia pionowego od zakresu odkształcenia.

Podsumowując, zależność rozkładu sztywności (8.9) można zastosować w celu wyznaczenia przybliżonej wartości sztywności w zakresie małych i średnich odkształceń dla gruntów spoistych oraz niespoistych. W przypadku gruntów spoistych, parametr  $b$ , występujący w równaniu (8.9), należy przyjąć według zależności (8.11), a w przypadku gruntów niespoistych – według (8.12).

## 9. PODSUMOWANIE I WNIOSKI

### 9.1 Podsumowanie

W pracy rozpatrzono model podłoża Vlasova (**MV** – model Vlasova) oraz jego modyfikację (**ZMV** – zmodyfikowany model Vlasova), polegającą na bardziej ogólnych założeniach:

- 1) wektor przemieszczenia ma wszystkie trzy niezerowe składowe;
- 2) uwzględnia się poprzeczną niejednorodność ośrodka gruntowego;
- 3) charakterystyki materiałowe są zmienne po głębokości warstwy.

W celu weryfikacji **MV**, czy też **ZMV**, rozpatrzono zagadnienie obciążenia warstwy na powierzchni w kształcie koła i prostokąta według teorii sprężystości, które służyło jako punkt odniesienia (benchmark) przy weryfikacji rozwiązań przybliżonych.

W literaturze dotyczącej zagadnień obciążenia półprzestrzeni, warstwy lub układu warstw, autorzy przeważnie poświęcają uwagę wyznaczeniu naprężeń, wywołanych obciążeniem zewnętrznym. Zdecydowanie mniej prac dotyczy wyznaczenia pola przemieszczeń, w szczególności od obciążeń w kształcie prostokąta<sup>95/</sup>. Okazuje się, że w niektórych z tych prac (patrz [76]<sup>96/</sup> czy [111]) przemieszczenia wyznaczone są błędnie. Z tego względu postanowiono poruszyć w rozprawie doktorskiej tematy dotyczące wyznaczenia przemieszczeń półprzestrzeni, warstwy, warstwy na półprzestrzeni, a także układu dwóch warstw sprężystych, poddanych obciążeniom na powierzchni w kształcie prostokąta oraz koła (patrz Rozdział 3).

W przypadku półprzestrzeni sprężystej obciążonej na prostokącie uzyskano analityczne, proste wzory na przemieszczenia zależne od trzech współrzędnych bezwymiarowych.

Analizując uzyskane wzory, zauważono pewne zależności pomiędzy maksymalnym przemieszczeniem półprzestrzeni, obciążonej na prostokącie o wymiarach boków  $2a \times 2b$ , a przemieszczeniem w narożu bądź w środku boku tego obciążenia. Te zależności są podane w podpunkcie 3.2.2, wzór (3.17).

***Takich zależności nie napotkano w literaturze<sup>97/</sup>.***

---

<sup>95/</sup> W bardzo dobrej monografii [61], s. 56, wz.(3.9), podano tylko całkowite wzory na przemieszczenia półprzestrzeni obciążonej równomiernie ( $p=const$ ) na kwadracie. Brak jest rozwiązań dla warstwy.

<sup>96/</sup> Podane w tej monografii wzory na wyznaczenie przemieszczeń pionowych dają poprawne wyniki tylko w przypadkach szczególnych.

<sup>97/</sup> W monografii P. Timoshenko i J. Goodiera [62], s. 322, stwierdzono, że przemieszczenie naroża kwadratu jest równe połowie przemieszczenia maksymalnego. W pracy wykazano, że jest to słuszne dla dowolnego prostokąta.

W pracy podano też wzór na maksymalne przemieszczenie półprzestrzeni dla dowolnych wymiarów boków obciążenia przyłożonego na prostokącie. Wzór ten przedstawiono w pięciu różnych postaciach (patrz Załącznik 2, pkt.2).

W Rozdziale 3 uzyskano rozwiązania ściśle zagadnień obciążenia na powierzchni w kształcie koła: półprzestrzeni, warstwy, warstwy na półprzestrzeni oraz układu dwóch warstw, opracowane między innymi na podstawie monografii [11], [61], [62], [63], [66].

W przypadku warstwy obciążonej na prostokącie rozwiązanie uzyskano sposobem opisanym przez W. Nowackiego w monografii [11], w której wektor przemieszczenia przedstawia się w postaci Papkowicza-Neubera poprzez dwie inne funkcje harmoniczne, spełniające równanie Laplace'a. W tym przypadku nie ma możliwości uzyskania rozwiązania w postaci analitycznych wzorów zamkniętych, lecz tylko poprzez zastosowanie całkowania numerycznego, które w pracy zostało wykonane za pomocą programu obliczeniowego *Wolfram Mathematica 13*. Okazuje się, że wyniki całkowania znacznie zależą od wybranej metody całkowania numerycznego (patrz podrozdział 3.2.3).

W Rozdziale 4, dotyczącym przybliżonego wyznaczenia maksymalnych przemieszczeń pionowych warstwy obciążonej na powierzchni w kształcie koła i prostokąta, zaproponowano **oryginalne**, przybliżone wzory na wyznaczenie maksymalnych przemieszczeń pionowych. Te wzory dobrze przybliżają przemieszczenia pionowe dla warstwy o dowolnej miąższości, a w przypadku granicznym, przy przejściu z miąższością warstwy do nieskończoności, otrzymuje się wynik ścisły teorii sprężystości.

Przedstawiono propozycję modyfikacji funkcji Vlasova (**FV** – funkcje Vlasova) aproksymujących przemieszczenia po głębokości warstwy (**ZFV** – zmodyfikowane funkcje Vlasova).

Zaproponowano też nowe, bazujące na rozwiązaniach ścisłych teorii sprężystości (**TS**), funkcje zanikania przemieszczeń dla warstwy obciążonej na powierzchni w kształcie koła oraz kwadratu (**ZFS** – zmodyfikowane funkcje zanikania przemieszczeń TS). Jednak wadą tych funkcji jest uciążliwe całkowanie analityczne (dla dowolnej miąższości warstwy). W celu wyznaczenia parametrów całkowych  $k_i$  trzeba stosować całkowanie numeryczne tych funkcji.

Interesujący jest fakt podobieństwa funkcji aproksymujących przemieszczenia pionowe po głębokości warstwy obciążonej na powierzchni w kształcie koła i prostokąta.

W Rozdziale 5 przedstawiono przeprowadzoną na podstawie **TS** weryfikację modelu podłoża Vlasova dla warstwy obciążonej na powierzchni w kształcie koła i prostokąta. Dla małych miąższości warstwy, porównywalnych z wymiarem przyłożonego

obciążenia, w przypadku warstwy obciążonej na kole wartości maksymalnych przemieszczeń pionowych (dla funkcji zanikania liniowej, hiperbolicznej oraz otrzymanej na podstawie teorii sprężystości) są o około 20% mniejsze niż według teorii sprężystości. Wraz ze wzrostem miąższości warstwy ( $\lambda$ ) wzrasta różnica pomiędzy **MV** a rozwiązaniem ścisłym **TS**. W przypadku przyjęcia liniowej funkcji zanikania, przy wzroście  $\lambda$  przemieszczenia pionowe dążą do zera, a w przypadku hiperbolicznej funkcji zanikania przemieszczenia szybko stabilizują się (dla  $\lambda=10$  różnica pomiędzy rozwiązaniem ścisłym a przybliżonym wynosi nawet 50%). Podobna sytuacja jest w przypadku warstwy obciążonej na kwadracie.

Model podłoża Vlasova ma swoje wady i zalety. Zaletą jest jego stosunkowa prostota, dająca możliwość łatwego wyznaczenia stanu naprężeniowo-odkształceniowego szerokiej klasy zagadnień obciążenia warstwy. W przypadku rozpatrywania zagadnień dotyczących współpracy konstrukcji fundamentowych (belek, płyt, itd.) i podłoża gruntowego, z warunku równości przemieszczeń w miejscu połączenia fundamentu z podłożem (zakładając więzy dwustronne) można otrzymać model fundamentu, spoczywającego na podłożu sprężystym Vlasova, opisywany zazwyczaj równaniem różniczkowym cząstkowym lub zwyczajnym czwartego rzędu. W celu wyznaczenia parametrów modelu Vlasova należy zadać sztywność gruntu, współczynnik Poissona oraz przyjąć funkcje zanikania przemieszczeń i wykonać całkowanie po grubości warstwy.

Wadą jest to, że model Vlasova nie uwzględnia przemieszczeń poziomych, wywołanych obciążeniem. Porównując rozwiązanie według modelu Vlasova z rozwiązaniem ścisłym teorii sprężystości stwierdzamy, że model Vlasova daje zaniżone wyniki.

Również, w przypadku wyznaczenia stanu naprężeniowo-odkształceniowego układu dwu i wielu warstw spoczywających na nieodkształcalnej bazie według modelu podłoża Vlasova, otrzymujemy układ równań, których liczba jest związana z liczbą warstw, co prowadzi do trudności z uzyskaniem rozwiązania<sup>98/</sup>.

Charakterystyczną cechą modelu podłoża Vlasova jest zerowanie się przemieszczeń pionowych dla  $\nu=1/2$ . Jednak według teorii sprężystości te przemieszczenia są różne od zera.

Uwzględniając powyżej opisane wady modelu Vlasova, w tej pracy podjęto próbę wyprowadzenia zmodyfikowanego modelu podłoża, uwzględniającego wszystkie trzy składowe wektora przemieszczenia, poprzeczną izotropię, a także zmienność

---

<sup>98/</sup> Przedstawiona modyfikacja wprowadzająca dowolne funkcje „stałych” materiałowych pozwala na uzyskanie rozwiązania podłoża wielowarstwowego.

charakterystyk materiałowych (sztywności, współczynników Poissona) po głębokości warstwy. Taki zmodyfikowany model podłoża, a także sposób opisanie niejednorodnego (po głębokości warstwy) ośrodka gruntowego w układzie współrzędnych prostokątnych oraz walcowych przedstawiono w Rozdziale 6.

W prostokątnym układzie współrzędnych wykorzystano dwa sposoby rozwiązania powstałych układów równań różniczkowych:

1) korzystając z metody operatorowej przedstawiono model, opisywany trzema niezależnymi równaniami różniczkowymi szóstego rzędu na poszukiwane funkcje przemieszczeń;

2) stosując przekształcenia całkowe Fouriera, układ równań przemieszczeniowych, powstały poprzez ortogonalizację Galerkina, sprowadzono do układu równań algebraicznych, z których wyznaczono transformaty przemieszczeń, a następnie ich retransformaty.

W walcowym układzie współrzędnych układ równań można rozseparować drogą zawyżenia rzędu równania na poszukiwane funkcje przemieszczeń. Jednak zawyżenie rzędu równania prowadzi do trudności uzyskania rozwiązania analitycznego (otrzymujemy równanie różniczkowe o zmiennych współczynnikach). Jest możliwość uzyskania rozwiązania metodami numerycznymi.

Interesujący jest fakt, że w przypadku ośrodka izotropowego, dla  $\nu=1/4$  ( $\lambda=\mu$ ), układ równań przemieszczeniowych we współrzędnych walcowych rozseparowuje się na dwa niezależne równania, każde drugiego rzędu na poszukiwane funkcje przemieszczeń, których rozwiązanie analityczne jest dobrze znane. Podobnie w prostokątnym układzie współrzędnych, dla  $\nu=1/4$ , układ równań przemieszczeniowych rozseparowuje się na układ dwu równań różniczkowych drugiego rzędu i niezależne równanie drugiego rzędu na przemieszczenie pionowe.

Weryfikację zmodyfikowanego modelu podłoża Vlasova przedstawiono w Rozdziale 7. W tym celu porównano model zmodyfikowany, model podłoża Vlasova oraz rozwiązanie ściśle teorii sprężystości dla dwóch przypadków obciążenia warstwy (na powierzchni w kształcie koła i prostokąta).

W przypadku warstwy obciążonej na powierzchni w kształcie prostokąta, przemieszczenia wyznaczono, stosując przekształcenie całkowe Fouriera. Autorowi nie udało się uzyskać retransformaty w postaci analitycznych wzorów zamkniętych. Wyniki w tym przypadku zostały otrzymane z zastosowaniem całkowania numerycznego, wykonanego w programie *Wolfram Mathematica 13*.

Dla warstwy izotropowej, przy założeniu  $\nu=1/4$ , przemieszczenia poziome są równe zeru<sup>99/</sup>, natomiast przemieszczenia pionowe są takie same jak w przypadku modelu podłoża Vlasova.

W porównaniu z **MV**, wyniki otrzymane według **ZMV** są nieco bardziej zbliżone do wyników według **TS**. Przemieszczenia poziome przy przejściu przez punkt  $\nu=1/4$  zmieniają znak i są równe zeru dla  $\nu=1/2$ .

Wartości przemieszczeń pionowych, otrzymane według **ZMV** dla małej miąższości warstwy, porównywalnej z wymiarem położonego obciążenia, są zbliżone do wyników według **TS**. Podobnie, jak i w **MV**, wraz ze wzrostem miąższości warstwy, wzrasta i różnica pomiędzy przemieszczeniami, otrzymanymi według **TS** oraz **ZMV**.

W przypadku warstwy izotropowej obciążonej na kole, dla  $\nu=1/4$ , jak już wspomniano wyżej, otrzymujemy dwa niezależne równania na przemieszczenia. Po uwzględnieniu warunków brzegowych okazuje się, że przemieszczenia poziome są równe zeru i **ZMV** upraszcza się do **MV**<sup>100/</sup>.

Często w praktyce budowlanej należy rozpatrywać zagadnienia układu warstw.

Ważną modyfikacją modelu Vlasova, przedstawioną w tej pracy, jest modyfikacja opisana w podrozdziale 6.6, pozwalająca rozpatrywać podłoża wielowarstwowe, ograniczając się do wyznaczenia parametrów całkowitych  $k_1$  i  $k_2$  w postaci sumy całek

$$k_{1,2} = \sum_{i=1}^n (...) dz, \text{ gdzie } z_i - z_{i-1} = h_i.$$

W wyniku takiej modyfikacji, w przypadku podłoża wielowarstwowego, unikamy rozwiązywania układu równań, liczba których jest równa liczbie warstw, jak w **MV**. Wystarczy w tym przypadku matematycznie opisać zmienność charakterystyk materiałowych po głębokości warstwy. Jako przykład w pracy rozpatrzono porównanie podłoża dwuwarstwowego, w którym sztywność jest stała po głębokości, a także zmienna w sposób ciągły i skokowy (podrozdział 7.4).

W Rozdziale 8 przedstawiono propozycję doboru parametrów sprężystości dla gruntów spoistych i niespoistych, która jest oparta na badaniach laboratoryjnych i przedstawiona między innymi w pracach [103], [105]. Propozycja doboru parametrów sprężystości polega na uwzględnieniu wpływu wskaźnika plastyczności oraz średniego naprężenia efektywnego na nieliniowy rozkład sztywności gruntu w zakresie małych i średnich odkształceń.

---

<sup>99/</sup> Przy braku obciążeń stycznych do płaszczyzny ograniczającej warstwę lub półprzestrzeń.

<sup>100/</sup> Okazuje się, że założenie Vlasova  $u=v=0$ , jest słuszne wyłącznie w przypadku, gdy  $\nu=1/4$ .



## 9.2 Wnioski

1. **MV** nie uwzględnia przemieszczeń poziomych w równaniach modelu.
2. Założenie Vlasova  $u=v=0$ , jest słuszne wyłącznie w przypadku, gdy  $\nu=1/4$ .
3. Uwzględnienie przemieszczeń w płaszczyźnie  $z=const$  w **ZMV** prowadzi do zwiększenia trudności w uzyskaniu rozwiązania i ma niewielki wpływ na wartości przemieszczeń pionowych.
4. Wartości pionowych przemieszczeń uzyskane z **ZMV** są bliższe wartościom ścisłym **TS** od uzyskanych z **MV**.
5. W przypadku małej miąższości warstwy, porównywalnej z wymiarem przyłożonego obciążenia, wyniki otrzymywane według **ZMV** można uznać za akceptowalne. W tym przypadku, w celu wyznaczenia przybliżonej wartości przemieszczeń pionowych, możemy stosować bądź **MV**, bądź **ZMV**.
6. Dla większych miąższości warstwy ( $\lambda$ ) nie należy przyjmować liniowej funkcji zanikania przemieszczeń.
7. W przypadku układu warstw, jak też zmiennych sztywności podłoża, zmodyfikowany dwuparametrowy model pozwala na stosunkowo łatwe wyznaczenie stanu naprężeniowo-odkształceniowego na drodze całkowania funkcji zanikania przemieszczeń i funkcji opisującej zmienność po głębokości sztywności gruntu. Taki zmodyfikowany dwuparametrowy model podłoża gruntowego, pozwalający na wyznaczenie przemieszczeń pionowych układu poprzecznie izotropowych warstw o zmiennej sztywności, ma znaczną przewagę nad modelem podłoża Vlasova.
8. Bardzo przydatne w praktyce inżynierskiej wydają się wyprowadzone w pracy ścisłe wzory na wyznaczenie przemieszczeń dla półprzestrzeni sprężystej i przybliżone wzory dla dowolnej miąższości warstwy sprężystej<sup>101/</sup>.
9. W przypadku półprzestrzeni obciążonej na powierzchni w kształcie prostokąta istnieje zależność pomiędzy maksymalnym przemieszczeniem a przemieszczeniem w narożu oraz w środku boku tego prostokąta.

---

<sup>101/</sup> Autor uzyskał inne, ważne dla praktyki, rozwiązania półprzestrzeni obciążonej równomiernym obciążeniem o kształcie różnym od prostokąta i koła. Ze względu na dużą objętość pracy, postanowiono te wyniki zamieścić w następnych publikacjach.

### 9.3 Najważniejsze elementy pracy

1. W przypadku półprzestrzeni obciążonej na prostokącie wyprowadzono nieznanne w literaturze zależności pomiędzy maksymalnym przemieszczeniem w środku a przemieszczeniami na boku lub w narożu prostokąta.
2. Korzystając z reprezentacji wektora przemieszczeń w postaci Helmholtza, dla ciała poprzecznie izotropowego w układzie współrzędnych walcowych przedstawiono autorskie wzory na przemieszczenia dla trzech dowolnych kombinacji współczynników  $K_1$ ,  $K_2$  i  $K_3$ , prowadzące do tego samego równania na funkcję naprężeń.
3. Przedstawiono nieznanne w literaturze przybliżone, bazujące na ścisłych rozwiązaniach teorii sprężystości wzory na wyznaczenie maksymalnych przemieszczeń dla warstwy o dowolnej miąższości, obciążonej na powierzchni w kształcie koła oraz kwadratu.
4. Przedstawiono modyfikację funkcji zanikania przemieszczeń, polegającą na uniknięciu stosowania parametru  $\gamma$ , a także oryginalne, nieznanne w literaturze<sup>102/</sup>, zmodyfikowane funkcje zanikania, bazujące na ścisłych rozwiązaniach teorii sprężystości.
5. Opracowano model niejednorodnego i poprzecznie izotropowego podłoża, którego wynikiem jest zmodyfikowany, dwuparametrowy, niejednorodny, poprzecznie izotropowy model podłoża Vlasova.

---

<sup>102/</sup> Patrz wzory (4.28) i (4.29).

## Załącznik 1. Modele matematyczne podłoża sprężystego<sup>103/</sup>

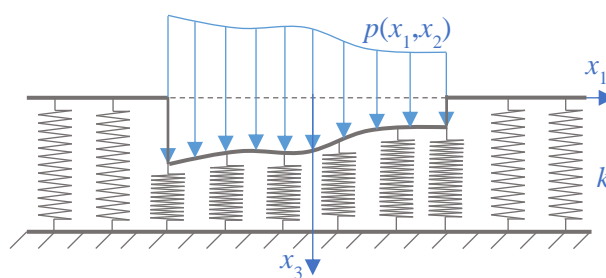
Według pracy [22], modele podłoża możemy podzielić na:

- a) modele jednokierunkowe – modele, w których zakłada się, że połączenie budowli z gruntem można opisać więzami jednostronnymi (w jednym ustalonym kierunku, np. kierunku pionowym);
- b) modele trójkierunkowe o więzach jedno- lub dwustronnych.

Poniżej zostaną przedstawione niektóre typy modeli podłoża gruntowego.

### 1) Model Winklera

Jak już wspomniano we Wstępie, Winkler założył, że podłoże składa się z układu niepołączonych ze sobą sprężyn, znajdujących się na nieodkształcalnej warstwie. Przemieszczenie punktów materialnych podłoża następuje tylko w miejscu przekazywania obciążeń na podłoże (rys.Z1.1). W przypadku obciążeń ściskających występuje skrócenie sprężyn, natomiast przy obciążeniach rozciągających – wydłużenie.



Rys.Z1.1. Schemat modelu podłoża Winklera.

Model podłoża Winklera jest opisywany równaniem

$$p(x_\alpha) = kw(x_\alpha), \quad (\text{Z1.1})$$

gdzie:

$p(x_\alpha)$  – obciążenie zewnętrzne działające na podłoże,  $[Nm^{-2}]$ ,

$k$  – współczynnik sprężystości podłoża,  $[Nm^{-3}]$ ,

$w(x_\alpha)$  – funkcja przemieszczenia warstwy powierzchniowej podłoża,  $[m]$ .

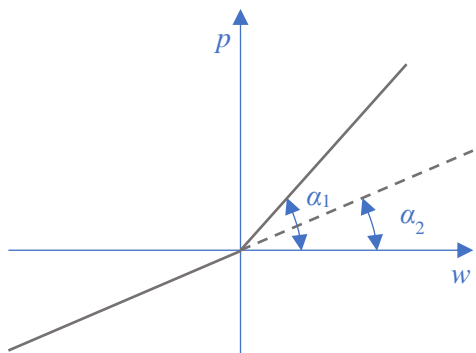
### 2) Biliniowy model Winklera

W 1972 r. Farshad i Shahinpoor [112] zaproponowali zmodyfikowane podłoże Winklera opisane równaniem

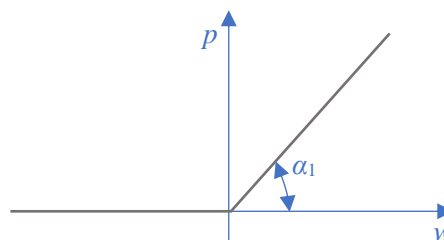
<sup>103/</sup> W Załączniku 1 wykorzystano treści i rysunki z pracy [22]. Tam też znajduje się obszerna literatura przedmiotu.

$$p(x_\alpha) = \begin{cases} k_1 w(x_\alpha), & w > 0, \\ k_2 w(x_\alpha), & w < 0. \end{cases} \quad (\text{Z1.2})$$

Takie zmodyfikowane podłoże charakteryzują dwie stałe  $k_1$  i  $k_2$ , obie mające wymiar  $[Nm^{-3}]$ . Rozciąganie i ściskanie podłoża opisywane jest różnymi współczynnikami (rys.Z1.2).



Rys.Z1.2. Biliniowy model podłoża Winklera.



Rys.Z1.3. Jednostronny model podłoża Winklera.

### 3) Jednostronny model Winklera

Jeśli przyjąć, że  $k_2=0$ , to (rys.Z1.3)

$$p(x_\alpha) = \begin{cases} k_1 w(x_\alpha), & \text{dla } w > 0, \\ 0, & \text{dla } w < 0. \end{cases} \quad (\text{Z1.3})$$

Ten model sprawia wiele kłopotów przy stosowaniu analitycznych metod w zagadnieniach płyt spoczywających na podłożu sprężystym i jest względnie łatwy w komputerowych metodach analizy takich zagadnień.

### 4) Inercyjny model Winklera

Model został opracowany przez Saito i Murakami. W tym modelu przyjęto, że podłoże składa się z układu niepołączonych ze sobą sprężyn o masie  $m$  i długości  $l$ . Jest to trójparametrowy model o parametrach  $k$ ,  $m_s$  i  $l$ , gdzie  $k$  – dynamiczny współczynnik podłoża. Inercyjne podłoże Winklera nadaje się do opisywania problemów falowych. Równanie modelu jest analogiczne do równania podłoża Winklera

$$p(x_\alpha, t) = kw(x_\alpha, t). \quad (\text{Z1.4})$$

Równania drgań podłużnych pojedynczego pręta „s” jest następujące

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_s^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (\text{Z1.5})$$

gdzie:

$$c_s^2 = \frac{EA}{m_s},$$

$E$  – moduł Younga,  $[Nm^{-2}]$ ,  $a$  – pole przekroju pręta,  $[m^2]$ ,  $L$  – długość pręta,  $[m]$ .

Jeśli dokonać uśrednienia i układ prętów potraktować jak warstwę sprężystą o gęstości masy  $\mu = m_s/A$ , to równanie drgań takiej warstwy można zapisać w postaci

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (Z1.6)$$

w której  $c = \sqrt{\frac{EI}{\mu}}$ .

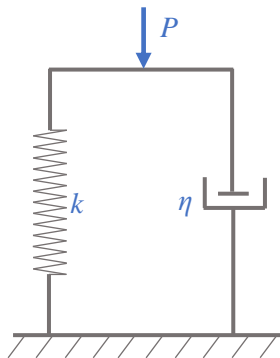
Jeśli na warstwę sprężystą działa obciążenie zmieniające się w sposób harmoniczny  $p = p_0 e^{i\omega t}$ , to

$$u(x_\alpha, t) = w(x_\alpha, t) e^{i\omega t}, \quad (Z1.7)$$

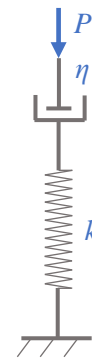
Zagadnieniom związanym z tego typu podłożem poświęcono wiele prac [22].

### 5) Podłoże Kelvina-Voigta

Model podłoża Kelvina-Voigta również jest uogólnieniem modelu Winklera, w którym uwzględnia się tłumienie w podłożu, przy założeniu równoległego połączenia elementów sprężyny i tłumika (rys.Z1.4).



Rys.Z1.4. Model podłoża Kelvina-Voigta.



Rys.Z1.5. Model podłoża Maxwella.

Równanie modelu jest postaci

$$p(x_a, t) = p_1(x_a, t) + p_2(x_a, t) = k w + \eta \frac{\partial w}{\partial t}, \quad (Z1.8)$$

gdzie  $\eta$  – współczynnik lepkości  $[Ns/m^3]$ .

Do opisu zachowania modelu służą dwie stałe  $k$  i  $\eta$ .

### 6) Podłoże Maxwella

Jest to model, w którym zakłada się szeregowe połączenie sprężyny i tłumika (rys.Z1.5).

Całkowite przemieszczenie układu jest równe

$$w = w_1 + w_2, \quad (\text{Z1.9})$$

gdzie:

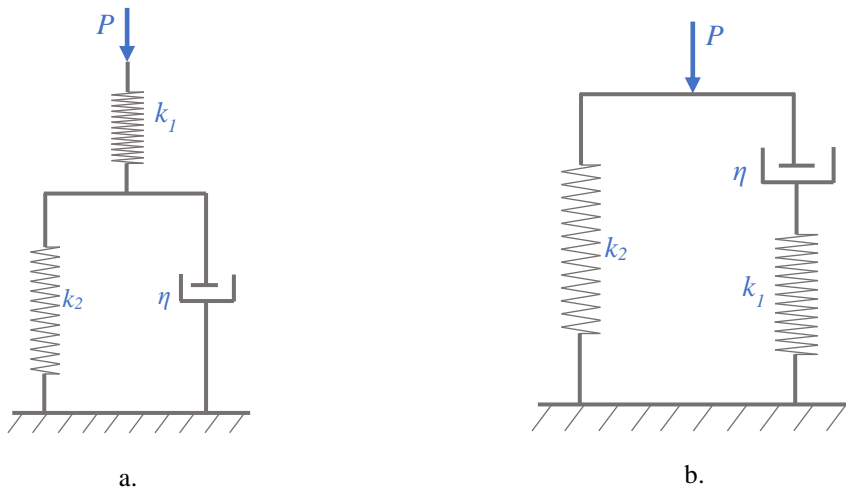
$$w_1 = \frac{p}{k}, \quad w_2 = \frac{p}{\eta}. \quad (\text{Z1.10})$$

Równanie modelu Maxwella jest postaci

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{p}{\eta} + \frac{1}{k} \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (\text{Z1.11})$$

### 7) Modele standardowe

Modele standardowe to modele, będące uogólnieniem modeli Kelvina-Vogta i Maxwella, bazujące się na pewnych kombinacjach sprężyn i tłumików. Mogą to być modele trzyparametrowe, znane są też i modele czteroparametrowe, np. model Burgersa, szczegóły którego podano w monografii [113].



Rys.Z1.6. Modele standardowe.

Równania powyższych modeli zapisujemy w postaci:

z rys.Z1.6a

$$(k_1 + k_2) p = \eta k_1 \left( \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{k_1} \frac{\partial p}{\partial t} \right) + k_1 k_2 w, \quad (\text{Z1.12})$$

z rys.Z1.6b

$$k_1 p + c \frac{\partial p}{\partial t} = (k_1 + k_2) \eta \frac{\partial w}{\partial t} + k_1 k_2 w. \quad (\text{Z1.13})$$

### 8) Dwuparametrowe modele podłoża

Równanie modeli dwuparametrowych, jednokierunkowych najczęściej przedstawia się w ogólnej postaci następująco

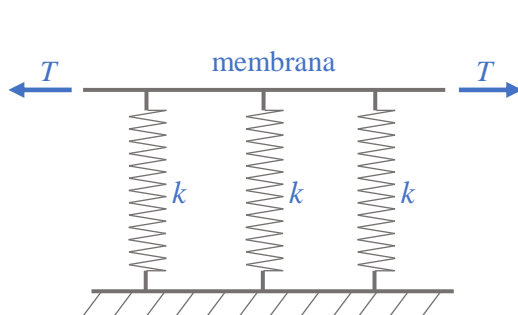
$$p(x_a) = k_1 w(x_a) - k_2 \nabla^2 w(x_a), \quad (\text{Z1.14})$$

gdzie  $\nabla^2$  – dwuwymiarowy operator Laplace’a, sztywność  $k_1$  ma wymiar  $[Nm^{-3}]$ ,  $k_2$  zaś –  $[Nm^{-1}]$ .

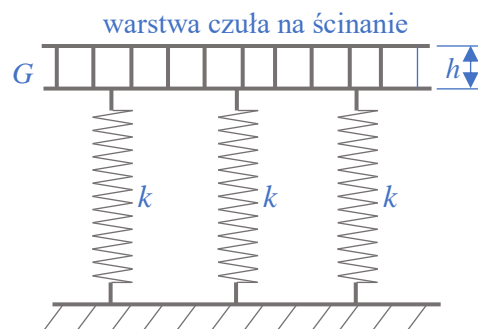
### 9) Model podłoża Filonenko-Borodiča

Filonenko-Borodič w 1940 r. zaproponował mechaniczny model podłoża składający się z spoczywającej na układzie sprężyn membrany napiętej siłami  $T$  (rys.Z1.7). Równanie modelu jest postaci

$$p(x_a) = k w(x_a) - T \nabla^2 w(x_a). \quad (\text{Z1.15})$$



Rys.Z1.7. Model podłoża Filonenko-Borodiča.



Rys.Z1.8. Model podłoża Pasternaka.

### 10) Model podłoża Pasternaka

W 1954 roku Pasternak, zaproponował model dwuparametrowego podłoża, złożonego z warstwy czułej na ścinanie o module ścinania  $G$ , spoczywającej na układzie sprężyn (rys.Z1.8).

Równanie modelu Pasternaka jest postaci

$$p(x_a) = k w(x_a) - G h \nabla^2 w(x_a). \quad (\text{Z1.16})$$

Równania Filonenko-Borodiča i Pasternaka mają tę samą postać (Z1.16) ale różnią się interpretacją fizyczną współczynników:

- podłoże Filonenko-Borodiča  $k_2=T$  – membrana,  $[Nm^{-1}]$ ,

- podłoże Pasternaka  $k_2=Gh$  – warstwa czuła na ścinanie,  $[Nm^{-1}]$ .

### 11) Model podłoża dwuparametrowego Wieghardta

Wieghardt w 1922 r. zaproponował model podłoża przyjmując, że zależność pomiędzy przemieszczeniem i obciążeniem jest dana w postaci całkowej

$$w(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{N}[|x-\xi|] p(\xi) d\xi, \quad (Z1.17)$$

gdzie:

$$\mathfrak{N}[|x-\xi|] = \frac{s}{2k} e^{-s|x-\xi|},$$

$s$  i  $k$  są charakterystykami podłoża.

Równanie modelu podłoża Wieghardta jest postaci

$$p = k w - \frac{k}{s^2} \frac{d^2 w}{dx^2}. \quad (Z1.18)$$

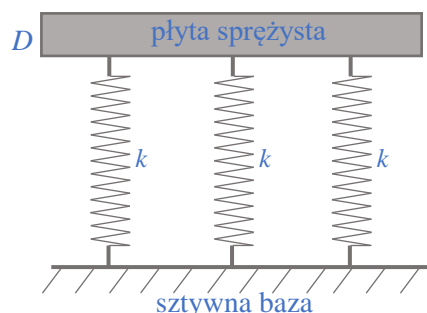
Podłoże Wieghardta jest uogólnieniem podłoża Winklera (jeśli  $s \rightarrow \infty$ , otrzymujemy model równanie Winklera).

### 12) Model podłoża Hetenyi'ego

Jest to dwuparametrowy model mechaniczny podłoża, w którym zakłada się, że podłoże stanowi płyta sprężysta, spoczywająca na układzie sprężyn. Równanie modelu jest postaci

$$p(x_a) = k w(x_a) - D \nabla^4 w(x_a), \quad (Z1.19)$$

gdzie  $D$  jest sztywnością płyty na zginanie w  $[Nm]$  (rys.Z1.9).



Rys.Z1.9. Model podłoża Hetenyi'ego.

### 13) Model półprzestrzeni sprężystej

Ten model ma szerokie zastosowanie w budownictwie, charakteryzowany jest dwiema stałymi  $E$  i  $\nu$ . Modele podłoża Żemočkina, Gorbunova-Posadova, Sinicyna,



Korieniewa bazują na rozwiązaniach półprzestrzeni sprężystej (półpłaszczyzny lub warstwy), wynikające ze znanego wzoru Boussinesq'a (dla  $z=0$ )

$$w(r) = \frac{P(1-\nu^2)}{\pi Er}. \quad (\text{Z1.20})$$

#### 14) Modele wieloparametrowe

Równanie modelu jednokierunkowego, wieloparametrowego można zapisać w ogólnej postaci

$$a_0 p(x_a) + \sum_{i=1}^m a_i \nabla^{2i} p(x_a) = k_0 w(x_a) + \sum_{j=1}^n k_j \nabla^{2j} w(x_a), \quad (\text{Z1.21})$$

w której współczynniki sztywności mają wymiar  $[Nm^{2j-3}]$ , zaś  $a_i - [m^{2i}]$ .

Najbardziej znane są następujące modele wieloparametrowe: model Ratzersdorfera, Favra, Levinsona, Bharatha, Kerra.

Ratzersdorfer, rozpatrując podłoże jednowymiarowe, przyjmuje odwrotną zależność do wzoru Wieghardta, zapisaną w postaci

$$p(x) = \int_{\Omega} P[\xi] w(x + \xi) d\xi. \quad (\text{Z1.22})$$

Favre rozpatrując podłoże jednowymiarowe przyjmuje następującą zależność

$$p(x) = F(w, w', w'', \dots). \quad (\text{Z1.23})$$

#### 15) Trójparametrowy model Kerra

W przypadku modelu Kerra można zapisać następujące równości (rys.Z1.10)

$$w = w_1 + w_2, \quad p = cw_1, \quad p = kw_2 - G\nabla^2 w_2, \quad (\text{Z1.24})$$

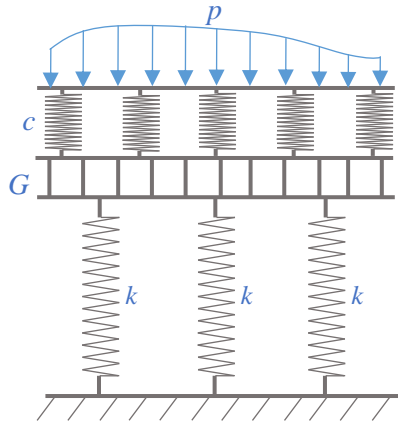
gdzie:

$w_1$  jest ugięciem warstwy sprężystej o współczynnikiem sprężystości  $c$ ,

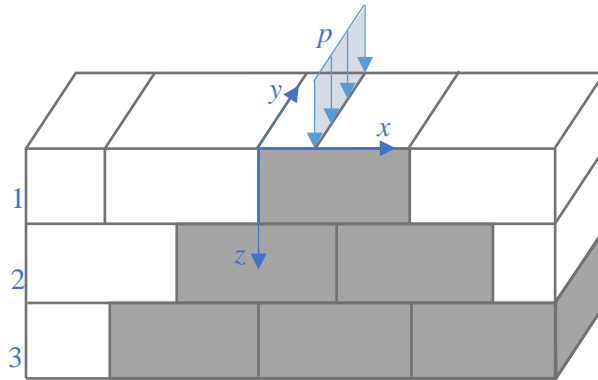
$w_2$  jest ugięciem warstwy ścinanej.

Równanie modelu Kerra można zapisać następująco

$$\left(1 + \frac{c}{k}\right) p(x_a) - \frac{G}{c} \nabla^2 p(x_a) = k w(x_a) - G \nabla^2 w(x_a). \quad (\text{Z1.25})$$



Rys.Z1.10. Model Kerra.



Rys.Z1.11. Model podłoża ziarnistego i bryłowego.

Uogólnieniem modelu Kerra jest model podłoża Jemielity [40], który składa się z układu  $n$  warstw SBS (Shear layer-Bending layer-Spring layer) składających się z co najwyżej trzech warstw: warstwy czulej na ścinanie, warstwy przenoszącej zginanie oraz warstwy sprężyn.

Istnieją również i inne modele wieloparametrowe, na przykład Kisiela, Biota, Boltzmana, Buflera, Świtki i innych.

#### 16) Modele podłoża ziarnistego i bryłowego

Kandaurov<sup>104/</sup>, w 1960 r. zaproponował model ośrodka ziarnistego, składający się z luźnych jednakowych prostopadłościów, ustawionych względem siebie w taki sposób, aby szczeliny pionowe były przesunięte w kolejnych warstwach. Ten model można porównywać z murem ceglanym (rys.Z1.11). Równanie modelu Kandaurova można przedstawić w następującej postaci

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = -\frac{P}{E} \sqrt{\frac{a}{2\pi z}} e^{-\frac{ax}{2z}}, \quad (\text{Z1.26})$$

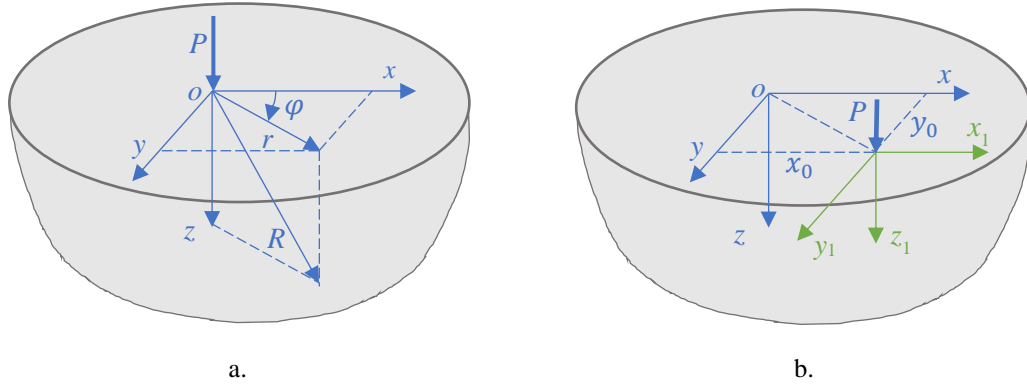
w której  $\alpha$  jest współczynnikiem struktury ośrodka.

<sup>104/</sup> Dokładniej o tym modelu patrz monografie [42].

## Załącznik 2. Rozwiązanie zagadnień teorii sprężystości

### 1. Zagadnienie Boussinesq'a. Zastosowanie funkcji Greena

Zagadnieniem Boussinesq'a nazywamy działanie siły skupionej na sprężystą półprzestrzeń (rys.Z2.1a).



Rys.Z2.1. Siła skupiona na półprzestrzeni.

Rozwiązanie tego zagadnienia znajdujemy w szeregu monografii z teorii sprężystości, przykładowo w monografii [11] i [61], a bardzo szczegółowo, z wykresami naprężeń, w monografii [3].

Przemieszczenia określone są wzorami:

$$u = \frac{Px}{4\pi\mu R} \left( \frac{z}{R^2} - \frac{1-2\nu}{R+z} \right), \quad v = \frac{Py}{4\pi\mu R} \left( \frac{z}{R^2} - \frac{1-2\nu}{R+z} \right), \quad (Z2.1)$$

$$w = \frac{P}{4\pi\mu R} \left( \frac{z^2}{R^2} + 2(1-\nu) \right),$$

w których oznaczono

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (Z2.2)$$

$\mu$  – stała Lamego,  $P=1[N]$ .

Wzory (Z2.1) wykorzystamy do wyznaczenia przemieszczeń, wywołanych dowolnym obciążeniem półprzestrzeni sprężystej, traktując je jako funkcje Greena. W tym celu należy przenieść siłę  $P$  w dowolny punkt ciała o współrzędnych  $\{x_0, y_0\}$  (rys.Z2.1b). Funkcję Greena zapisujemy w postaci (Z2.1), wstawiając w miejsce współrzędnych  $\{x, y\}$ , współrzędne  $\{x-x_0, y-y_0\}$ .

Wprowadzając zmienne bezwymiarowe:

$$x = \xi a, \quad y = \eta b, \quad z = \zeta a, \quad b = \kappa a, \quad x_0 = \xi_0 a, \quad y_0 = \eta_0 b = \eta_0 \kappa a, \quad (Z2.3)$$

w których  $a, b$  dowolne wielkości porównawcze o wymiarze długości, otrzymujemy następujące funkcje Greena:

$$u_G = \frac{P\xi}{4a\pi\mu R_0} \left( \frac{\zeta}{R_0^2} - \frac{1-2\nu}{R_0 + \zeta} \right), \quad v_G = \frac{P\eta}{4a\pi\mu R_0} \left( \frac{\zeta}{R_0^2} - \frac{1-2\nu}{R_0 + \zeta} \right),$$

$$w_G = \frac{P}{4a\pi\mu R_0} \left( \frac{\zeta^2}{R_0^2} + 2(1-\nu) \right),$$
(Z2.4)

gdzie:

$$R_0 = \sqrt{(\xi - \xi_0)^2 + \kappa^2(\eta - \eta_0)^2 + \zeta^2},$$
(Z2.5)

W przypadku, gdy na półprzestrzeń działa obciążenie  $p(\xi, \eta)$ , przemieszczenia wyznaczamy z następujących wzorów:

$$u(\xi, \eta, \zeta) = \frac{a}{4\pi\mu} \int_{S_0} \frac{p(\xi, \eta)(\xi - \xi_0)}{R_0} \left( \frac{\zeta}{R_0^2} - \frac{1-2\nu}{R_0 + \zeta} \right) dS_0,$$

$$v(\xi, \eta, \zeta) = \frac{a}{4\pi\mu} \int_{S_0} \frac{p(\xi, \eta)(\eta - \eta_0)}{R_0} \left( \frac{\zeta}{R_0^2} - \frac{1-2\nu}{R_0 + \zeta} \right) dS_0,$$

$$w(\xi, \eta, \zeta) = \frac{a}{4\pi\mu} \int_{S_0} \frac{p(\xi, \eta)}{R_0} \left( \frac{\zeta^2}{R_0^2} + 2(1-\nu) \right) dS_0,$$
(Z2.6)

gdzie  $S_0$  jest domkniętym obszarem płaskim.

## 2. Obciążenie na obszarze prostokąta<sup>105/</sup>

Korzystając ze wzorów (3.8)<sub>3</sub> i (3.9)<sub>3</sub>, maksymalne przemieszczenie dla dowolnego  $\kappa$  można przedstawić w różnych postaciach, dających poprawne wyniki<sup>106/</sup>:

$$w_{\max} = \frac{pa(1-\nu^2)}{E} w^*,$$
(Z2.7)

gdzie:

$$\text{I.} \quad w^* = \frac{4}{\pi} \left[ \kappa \operatorname{arccot} h \left( \sqrt{1 + \kappa^2} \right) + \operatorname{arcsin} h(\kappa) \right],$$
(Z2.8)

$$\text{II.} \quad w^* = \frac{2}{\pi} \left[ \kappa \ln \left( \frac{\sqrt{1 + \kappa^2} + 1}{\sqrt{1 + \kappa^2} - 1} \right) + \ln \left( \frac{\sqrt{1 + \kappa^2} + \kappa}{\sqrt{1 + \kappa^2} - \kappa} \right) \right],$$
(Z2.9)

<sup>105/</sup> Zagadnienie półprzestrzeni obciążonej na powierzchni w kształcie kwadratu rozpatrywał A. E. H. Love w pracy [75].

<sup>106/</sup> Wzory (Z2.8)-(Z2.12) otrzymane poprzez elementarne przekształcenia [72] i [73].

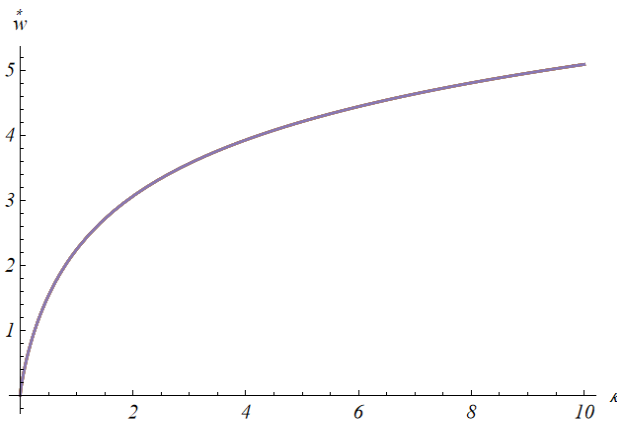
$$\text{III.} \quad w^* = \frac{2}{\pi} \left[ \kappa \ln \left( \frac{\sqrt{1+\kappa^2}+1}{\sqrt{1+\kappa^2}-1} \right) + 2 \ln \left( \sqrt{1+\kappa^2} + \kappa \right) \right], \quad (\text{Z2.10})$$

$$\text{IV.} \quad w^* = \frac{4}{\pi} \left[ \kappa \left( \ln(\kappa) - \ln \left( \sqrt{1+\kappa^2} - 1 \right) \right) + \ln \left( \sqrt{1+\kappa^2} + \kappa \right) \right], \quad (\text{Z2.11})$$

$$\text{V.} \quad w^* = \frac{2}{\pi} \left[ \kappa \left( \ln \left( 2\sqrt{1+\kappa^2} + 2 + \kappa^2 \right) - 2 \ln(\kappa) \right) - \ln \left( 2\kappa \left( \kappa - \sqrt{1+\kappa^2} \right) + 1 \right) \right]. \quad (\text{Z2.12})$$

**Autor pracy, w dostępnej literaturze, nie znalazł takich wzorów.**

Na rys.Z2.2 przedstawiono wykresy funkcji (Z2.8)-(Z2.12) w celu wykazania poprawność powyższych wzorów.



Rys.Z2.2. Graficzne przedstawienie wzorów (Z2.8)-(Z2.12).

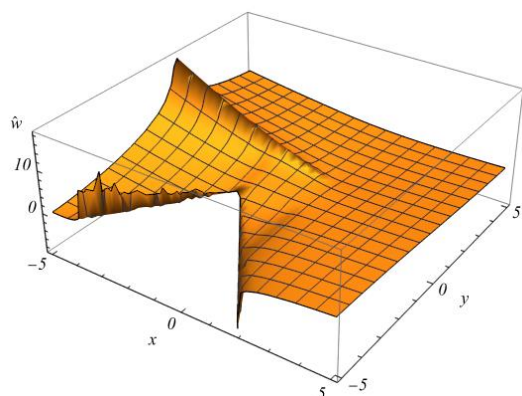
### 3. Analiza wzorów danych w pracach [2], [3], [76]<sup>107/</sup>

W pracy, w odnośniku nr 30, wspomnieliśmy o znalezieniu na stronie internetowej [https://scadsoft.com/tests\\_scad/index/test/165](https://scadsoft.com/tests_scad/index/test/165) poprawnego wzoru na przemieszczenia  $w(x,y,z)$  dla obciążenia w kształcie prostokąta. Na tej stronie podano obliczenia MES za pomocą programu *SCAD Office*, problemu A. E. H. Love'a [75]. W celu weryfikacji obliczeń numerycznych podano analityczne wzory na naprężenia i przemieszczenia, powołując się na prace [2], [3], [76]. W pracy [2] nie znajdujemy wzorów na przemieszczenia. Okazało się, że w pracy [76] podano błędny ogólny wzór na przemieszczenia. Tak więc testujący program *SCAD* prawdopodobnie sami poprawili wzory dane w pracy [76].

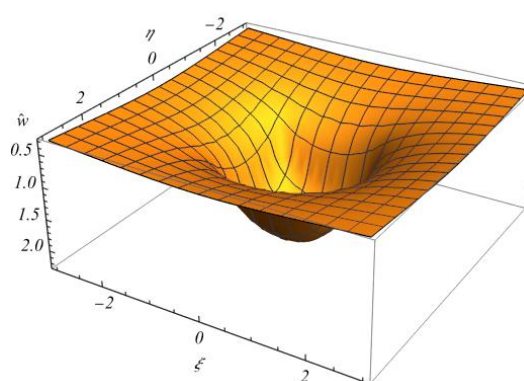
W monografii [3], s. 123 przedstawiono wzory na naprężenia, powołując się na pracę [114], która nie jest dostępna autorowi. W monografii [76], s. 25, wz.1.30, znajduje się wzór na przemieszczenie pionowe dla półprzestrzeni, obciążonej równomiernie na powierzchni w kształcie prostokąta  $w(x,y,z)$ . Podany w tej pracy wzór zawiera błędy.

<sup>107/</sup> W monografii [2] nie znajdują się wzory na przemieszczenia półprzestrzeni obciążonej w kształcie prostokąta, a tylko powołanie na monografie [3] i [76].

Dowodem jest rysunek przemieszczeń płaszczyzny  $z=0$  według wzoru danego w pracy [76] i w doktoracie (wzory (3.18)<sub>3</sub>, (3.21)).



Rys.Z2.3. Wykres  $w(x,y,0)$  według wzorów danych w monografii [76] dla  $\nu=0$ ,  $a=1$ ,  $b=1$ .



Rys.Z2.4. Wykres  $w(x,y,0)$  według wzorów (3.18)<sub>3</sub>, (3.21) dla  $\nu=0$ ,  $\kappa=1$ .

Interesujący jest fakt podania przez V. Florina [76], s. 25, wz.1.31, poprawnego wzoru na maksymalne przemieszczenie w postaci wzoru (Z2.9).

W pracy [111], s. 87-87, wz.7-9, przedstawiono przemieszczenia w postaci sumy przemieszczeń wywołanych ścinaniem i zmianami objętościowymi. Niestety, podane wzory zawierają błędy (wz.37, 49). Wartość i znak przemieszczenia  $w(0,0,0)$  są niepoprawne.

#### 4. Zagadnienie obrotowo-symetryczne<sup>108/</sup>

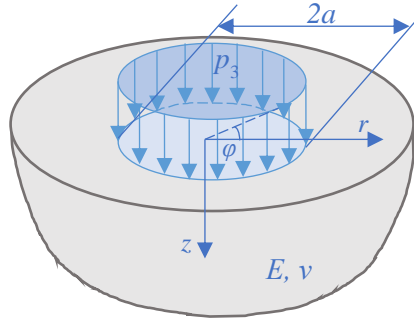
W ciałach obciążonych osiowo-symetrycznie przemieszczenia, odkształcenia i naprężenia będą niezależne od kąta  $\varphi$ . Wektor przemieszczeń, w układzie współrzędnych walcowych, zapiszemy w postaci

$$u \equiv u(u_r, 0, u_z). \quad (Z2.13)$$

Stan odkształcenia charakteryzowany jest związkami:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= u_{r,r}, & \varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{u_r}{r}, & \varepsilon_{zz} &= u_{z,z}, \\ \varepsilon_{rz} &= \frac{1}{2}(u_{r,z} + u_{z,r}), & \varepsilon_{r\varphi} &= \varepsilon_{z\varphi} = 0. \end{aligned} \quad (Z2.14)$$

<sup>108/</sup> Opracowano między innymi na podstawie monografii [11], [61], [62], [63], [66].



Rys.Z2.5. Półprzestrzeń obciążona osiowosymetrycznie.

Natomiast stan naprężenia charakteryzowany jest związkami:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= 2\mu\varepsilon_{rr} + \lambda e, & \sigma_{\varphi\varphi} &= 2\mu\varepsilon_{\varphi\varphi} + \lambda e, & \sigma_{zz} &= 2\mu\varepsilon_{zz} + \lambda e, \\ \sigma_{rz} &= 2\mu\varepsilon_{rz}, & \sigma_{r\varphi} &= 2\mu\varepsilon_{r\varphi}, & e &= \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{zz}. \end{aligned} \quad (\text{Z2.15})$$

Równania równowagi teorii sprężystości, przy braku sił masowych zapiszemy w postaci

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = 0. \end{cases} \quad (\text{Z2.16})$$

Wyrażając naprężenia poprzez przemieszczenia otrzymamy układ dwu równań przemieszczeniowych

$$\begin{cases} (1+k)\widehat{\nabla}^2 u_r - k\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z}\right) = 0, \\ \nabla^2 u_z + k\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + k\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial z}\right) = 0, \end{cases} \quad (\text{Z2.17})$$

gdzie:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \widehat{\nabla}^2 = \nabla^2 - \frac{1}{r^2}, \quad k = 1 + \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{1-2\nu}. \quad (\text{Z2.18})$$

Wprowadzając funkcje:

$$u_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad u_z = w, \quad (\text{Z2.19})$$

oraz całkując po zmiennej  $r$  równanie (Z2.17)<sub>1</sub>, otrzymamy następujący układ równań przemieszczeniowych

$$\begin{cases} \left(1 + \frac{1}{k}\right) \nabla^2 u - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left( \nabla^2 u - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \left( \frac{1}{k} \nabla^2 w + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = 0, \end{cases} \quad (\text{Z2.20})$$

gdzie:  $u=u(x,z)$ ,  $w=w(x,z)$ .

Układ równań (Z2.13) można zapisać w postaci operatorowej

$$\begin{cases} L_{11}u + L_{12}w = 0, \\ L_{21}u + L_{22}w = 0, \end{cases} \quad (\text{Z2.21})$$

gdzie operatory  $L_{ij}$  zdefiniowane następująco:

$$\begin{aligned} L_{11} &= \left(1 + \frac{1}{k}\right) \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}, & L_{12} &= \frac{\partial}{\partial z}, \\ L_{21} &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right), & L_{22} &= \left( \frac{1}{k} \nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right). \end{aligned} \quad (\text{Z2.22})$$

Wprowadzając funkcję  $\chi=\chi(r,z)$  związaną z funkcjami  $u$  i w zależnościami:

$$u = \begin{vmatrix} 0 & L_{12} \\ \chi & L_{22} \end{vmatrix}, \quad w = \begin{vmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & \chi \end{vmatrix}, \quad (\text{Z2.23})$$

otrzymamy przemieszczenia wyrażone poprzez funkcję  $\chi$ :

$$u = -\frac{\partial \chi}{\partial z}, \quad w = \left(1 + \frac{1}{k}\right) \nabla^2 \chi - \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2}. \quad (\text{Z2.24})$$

Ostatecznie przemieszczenia (Z2.19) zapiszemy w postaci:

$$u_r = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial r \partial z}, \quad w = \left(1 + \frac{1}{k}\right) \nabla^2 \chi - \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2}. \quad (\text{Z2.25})$$

Przemieszczenia, wyrażone poprzez funkcję  $\chi$  (nazywaną funkcją Love'a, mającą wymiar  $[m^3]$ ), prowadzą do tego, że pierwsze równanie przemieszczeniowe (Z2.20)<sub>1</sub> jest spełnione tożsamościowo, natomiast drugie równanie (Z2.20)<sub>2</sub> upraszcza się do równania biharmonicznego na funkcję Love'a  $\chi$

$$\nabla^4 \chi = 0, \quad (\text{Z2.26})$$

w którym  $\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2 = \frac{\partial^4}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3}{\partial r^3} + 2 \frac{\partial^4}{\partial r^2 \partial z^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3}{\partial r \partial z^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^4}{\partial z^4}$ .

Rozwiązując równanie biharmoniczne (Z2.26) z warunkami brzegowymi, wyrażonymi poprzez funkcję Love'a, znajdziemy poszukiwaną funkcję  $\chi$ , a następnie przemieszczenia (Z2.25).



Do rozwiązywania równania (Z2.26) często stosowane przekształcenia całkowe Hankela, które zdefiniowane jest w następujący sposób [8], [79]

$$\tilde{\chi}(s, z) = \int_0^{\infty} r \chi(r, z) J_0(sr) dr, \quad (Z2.27)$$

a odwrotność dana jest wzorem

$$\chi(r, z) = \int_0^{\infty} s \tilde{\chi}(s, z) J_0(sr) ds, \quad (Z2.28)$$

gdzie  $J_0$  – funkcja Bessela pierwszego rodzaju zerowego rzędu [80].

Jeśli przemieszczenia (Z2.25) podstawić do zależności (Z2.14) a potem do (Z2.15), otrzymamy następujące wzory na naprężenia, wyrażone poprzez funkcję Love'a:

$$\sigma_{rr} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\lambda}{k} \nabla^2 \chi - 2\mu \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} \right), \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\lambda}{k} \nabla^2 \chi - \frac{2\mu}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} \right),$$

$$\sigma_{zz} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{2\mu(1+k) + \lambda}{k} \nabla^2 \chi - 2\mu \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \right), \quad (Z2.29)$$

$$\sigma_{rz} = \mu \left[ \left( 1 + \frac{1}{k} \right) \left( \frac{\partial^3 \chi}{\partial r^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} + \frac{\partial^3 \chi}{\partial r \partial z^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \chi}{\partial r} \right) - 2 \frac{\partial^3 \chi}{\partial r \partial z^2} \right].$$

## 5. Półprzestrzeń sprężysta obciążona równomiernie na powierzchni koła

Rozpatrzmy półprzestrzeń sprężystą, obciążoną jak pokazano na rys.Z2.5. Do rozwiązania równania biharmonicznego (Z2.26) skorzystamy z transformacji całkowej Hankela, która zdefiniowana wzorem (Z2.27) i jej odwrotnością (Z2.28). W wyniku otrzymamy następujące równanie różniczkowe zwyczajne IV rzędu zmiennej  $z$

$$\tilde{\chi}^{(4)} - 2s^2 \tilde{\chi}'' + s^4 \tilde{\chi} = 0, \quad (Z2.30)$$

którego rozwiązanie zapiszemy w postaci

$$\tilde{\chi} = C_1 e^{-sz} + \frac{C_2}{a} z e^{-sz} + C_3 e^{sz} + \frac{C_4}{a} z e^{sz}, \quad (Z2.31)$$

gdzie:

$a$  – charakterystyczny promień przyłożonego obciążenia, mający wymiar  $[m]$ ,

$s$  – parametr, mający wymiar  $[m^{-1}]$ ,

$C_i$  – stałe całkowania, przy czym  $i=1, 2, 3, 4$ .

Transformatę obciążenia powierzchniowego w kształcie koła o promieniu  $a$  zapiszemy następująco

$$\tilde{p}_3(s) = \int_0^{\infty} p(r) r J_0(sr) dr = \frac{ap}{s} J_1(as), \quad (\text{Z2.32})$$

gdzie:

$p(r)$  – obciążenie powierzchniowe,  $[Nm^{-2}]$ ,

$J_1$  – funkcja Bessela pierwszego rodzaju pierwszego rzędu [80].

W przypadku półprzestrzeni sprężystej obciążonej na powierzchni w kształcie koła o promieniu  $a$  ( $p=const$ ), warunki brzegowe są następujące:

$$\tilde{\sigma}_{zz}|_{z=0} = -\tilde{p}_3 = -\frac{ap}{s} J_1(as), \quad (\text{Z2.33})$$

$$\tilde{\sigma}_{rz}|_{z=0} = 0, \quad \tilde{u}_r|_{z \rightarrow \infty} = 0, \quad \tilde{w}|_{z \rightarrow \infty} = 0.$$

Uwzględniając warunki (Z2.33)<sub>3,4</sub>, stałe  $C_3$  i  $C_4$  muszą być równe zero. Ostateczne transformatę funkcji Love'a zapiszemy w postaci

$$\tilde{\chi} = C_1 e^{-sz} + \frac{C_2}{a} z e^{-sz}. \quad (\text{Z2.34})$$

Wykorzystując pozostałe warunki brzegowe (Z2.33)<sub>1,2</sub> znajdziemy stałe  $C_1$  i  $C_2$ , które wynoszą:

$$C_1 = -\frac{2\nu(1+\nu)ap}{Es^4} J_1(as), \quad C_2 = -\frac{(1+\nu)a^2 p}{Es^3} J_1(as). \quad (\text{Z2.35})$$

Uwzględniając stałe całkowania (Z2.35), transformaty przemieszczeń (Z2.25) zapisujemy w postaci:

$$\tilde{u}_r = -\frac{ap(1+\nu)(1-2\nu-sz)}{Es^2} e^{-sz} J_1(as), \quad (\text{Z2.36})$$

$$\tilde{w} = \frac{ap(1+\nu)(2(1-\nu)+sz)}{Es^2} e^{-sz} J_1(as),$$

a transformaty naprężeń (Z2.29) odpowiednio:

$$\tilde{\sigma}_{zz}(s, z) = -\frac{ap(1+sz)}{s} e^{-sz} J_1(as), \quad (\text{Z2.37})$$

$$\tilde{\sigma}_{rz}(s, z) = -apz e^{-sz} J_1(as).$$

Wykonując odwrotne przekształcenia całkowe Hankela, otrzymamy wzory na przemieszczenia radialne  $u_r$ , pionowe  $w$  oraz naprężenia  $\sigma_{ij}$ .

Obliczanie transformat odwrotnych przemieszczeń oraz naprężeń zostało wykonane w programie *Wolfram Mathematica 13*. W przypadku półprzestrzeni jest możliwość uzyskania wzorów zamkniętych na funkcji przemieszczeń płaszczyzny  $z=0$  oraz funkcji

zanikania przemieszczeń po głębokości  $z$  dla ustalonej wartości promienia  $r$ . W pozostałych przypadkach (na przykład ośrodek ograniczony) należy stosować całkowanie numeryczne.

W przypadku szczególnym dla płaszczyzny  $z=0$ , wprowadzając układ współrzędnych bezwymiarowych:

$$r = \rho a, \quad z = \zeta a, \quad s = \frac{\eta}{a}, \quad (Z2.38)$$

wzory na przemieszczenia  $u_r$ ,  $w$  oraz naprężenia  $\sigma_{zz}$  zapiszemy następująco:

$$u_r(\rho, 0) = -\frac{ap(1+\nu)(1-2\nu)}{2E} \begin{cases} \rho, & 0 \leq \rho \leq 1, \\ \frac{1}{\rho}, & \rho \geq 1, \end{cases}$$

$$w(\rho, 0) = -\frac{4ap(1-\nu^2)}{E\pi} \begin{cases} \hat{E}(\rho^2), & 0 \leq \rho \leq 1, \\ \rho \hat{E}\left(\frac{1}{\rho^2}\right) + \frac{1-\rho^2}{\rho} \hat{K}\left(\frac{1}{\rho^2}\right), & \rho \geq 1, \end{cases} \quad (Z2.39)$$

$$\sigma_z(\rho, 0) = -p[\hat{H}(\rho) - \hat{H}(\rho-1)],$$

gdzie:

$$\hat{H}(\rho) = \begin{cases} 0, & \rho < 0 \\ 1, & \rho \geq 0 \end{cases} \text{ – funkcja Heaviside'a,}$$

a funkcje eliptyczne występujące we wzorze (Z2.39)<sub>2</sub> zdefiniowane są następująco<sup>109/</sup>:

$$\hat{E}(\rho) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(1-\rho \sin^2 \theta)} d\theta, \quad \hat{K}(\rho) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{(1-\rho \sin^2 \theta)}} d\theta. \quad (Z2.40)$$

Natomiast w przypadku, kiedy ustalimy współrzędną radialną  $\rho$ , dla dowolnej głębokości warstwy  $\zeta$  otrzymamy:

$$u_r(1, \zeta) = -\frac{ap\zeta(1+\nu)}{E\pi} \left[ \hat{K}\left(-\frac{4}{\zeta^2}\right) + (1-2\nu)\hat{E}\left(-\frac{4}{\zeta^2}\right) - \pi(1-\nu) \right],$$

$$w(0, \zeta) = -\frac{ap(1+\nu)}{E\sqrt{1+\zeta^2}} \left[ 2(1-\nu) - \zeta(1-2\nu)(\sqrt{1+\zeta^2} - \zeta) \right], \quad (Z2.41)$$

<sup>109/</sup> Patrz dokumentacja Wolfram [78].

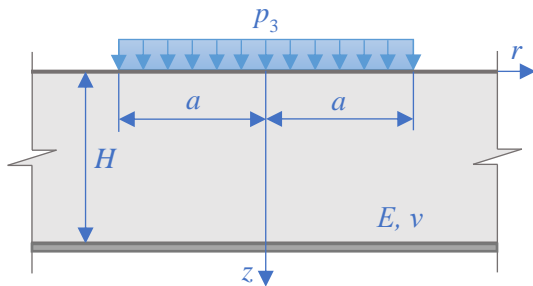
$$\sigma_{zz}(0, \zeta) = p \left[ \frac{\zeta^3}{(\sqrt{1+\zeta^2})^3} - 1 \right],$$

$$\sigma_{rz}(1, \zeta) = -\frac{p\zeta}{\pi} \left[ \frac{2+\zeta^2}{4+\zeta^2} \hat{E}\left(-\frac{4}{\zeta^2}\right) - \hat{K}\left(-\frac{4}{\zeta^2}\right) \right].$$

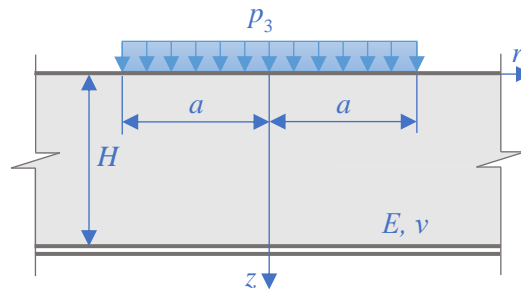
Funkcje przemieszczeń (Z2.39) i (Z2.41) zostały również otrzymane między innymi, w nieco innej postaci, w monografii [61], s. 94-97.

## 6. Warstwa sprężysta obciążona równomiernie na powierzchni koła<sup>110/</sup>

Rozpatrzmy dwa przypadki obciążenia warstwy sprężystej, różniące się warunkami brzegowymi: warstwy utwierdzonej oraz warstwy z poślizgiem, spoczywających na nieodkształcalnej bazie (rys.Z2.6-Z2.7). Do rozwiązania równania biharmonicznego (Z2.26) zastosujemy transformatę całkową Hankela podaną wzorem (Z2.27) i jej odwrotnością (Z2.28). Transformatę funkcji Love'a dana jest wzorem (Z2.31).



Rys.Z2.6. Warstwa utwierdzona.



Rys.Z2.7. Warstwa z poślizgiem.

W przypadku warstwy utwierdzonej (rys.Z2.6) warunki na brzegach, przy założeniu, że  $p_3=p=const$ , są następujące:

$$\tilde{\sigma}_{zz}|_{z=0} = -p \int_0^{\infty} r J_0(rs) dr = -\frac{apJ_1(as)}{s}, \quad (Z2.42)$$

$$\tilde{\sigma}_{rz}|_{z=0} = 0, \quad \tilde{u}_r|_{z=H} = 0, \quad \tilde{u}_z|_{z=H} = 0.$$

W tym przypadku, mamy następujące cztery stałe całkowania<sup>111/</sup>:

$$C_1 = -\frac{2a^5 p(1+\nu) \left[ 2\eta\lambda\nu - \eta^2\lambda^2 + \nu \left( (4\nu-3)e^{2\eta\lambda} - 4\nu + 5 \right) - 2 \right]}{E\eta^4 \left[ -2e^{2\eta\lambda} \left( 2\eta^2\lambda^2 + 4\nu(2\nu-3) + 5 \right) + (4\nu-3)e^{4\eta\lambda} + 4\nu - 3 \right]} e^{2\eta\lambda} J_1(\eta),$$

<sup>110/</sup> Rozwiązania warstwy, układu warstw na półprzestrzeni sprężystej, układu dwóch na półprzestrzeni, zostały szczegółowo badane w monografii [61].

<sup>111/</sup> W odróżnieniu od monografii [61], w niniejszym rozwiązaniu wszystkie stałe są w jednakowych jednostkach.

$$C_2 = \frac{a^5 p(1+\nu) \left[ (4\nu-3)e^{2\eta\lambda} + 2\eta\lambda - 1 \right]}{E\eta^3 \left[ 2e^{2\eta\lambda} (2\eta^2\lambda^2 + 4\nu(2\nu-3) + 5) + (3-4\nu)e^{4\eta\lambda} - 4\nu + 3 \right]} e^{2\eta\lambda} J_1(\eta),$$

$$C_3 = \frac{a^5 p(1+\nu) \left[ e^{2\eta\lambda} (\eta^2\lambda^2 + 2\eta\lambda\nu + \nu(4\nu-5) + 2) + (3-4\nu)\nu \right]}{E\eta^4 \left[ 2\eta^2\lambda^2 + (3-4\nu)\cosh(2\eta\lambda) + 4\nu(2\nu-3) + 5 \right]} e^{-2\eta\lambda} J_1(\eta),$$

$$C_4 = -\frac{a^5 p(1+\nu) \left[ e^{2\eta\lambda} (2\eta\lambda + 1) - 4\nu + 3 \right]}{2E\eta^3 \left[ 2\eta^2\lambda^2 + (3-4\nu)\cosh(2\eta\lambda) + 4\nu(2\nu-3) + 5 \right]} e^{-2\eta\lambda} J_1(\eta),$$

przy czym  $\lambda = H/a$ .

Natomiast w przypadku warstwy z poślizgiem (rys.Z2.7) warunki na brzegach, przy założeniu, że  $p_3 = p = \text{const}$ , są następujące:

$$\tilde{\sigma}_{zz} \Big|_{z=0} = -p \int_0^\infty r J_0(rs) dr = -\frac{ap}{s} J_1(as), \quad (Z2.43)$$

$$\tilde{\sigma}_{rz} \Big|_{z=0} = 0, \quad \tilde{\sigma}_{rz} \Big|_{z=H} = 0, \quad \tilde{u}_z \Big|_{z=H} = 0.$$

Stałe całkowania  $C_i$ , w tym przypadku, są równe ( $i=1, 2, 3, 4$ ):

$$C_1 = -\frac{a^5 p(1+\nu) \left[ \nu(e^{2\eta\lambda} - 1) + \eta\lambda \right]}{E\eta^4 \left[ 2\eta\lambda + \sinh(2\eta\lambda) \right]} J_1(\eta), \quad C_2 = -\frac{a^5 p(1+\nu)(e^{2\eta\lambda} - 1)}{2E\eta^3 \left( \sinh(2\eta\lambda) + 2\eta\lambda \right)} J_1(\eta),$$

$$C_3 = \frac{2a^5 p(1+\nu) \left[ e^{2\eta\lambda} (\eta\lambda + \nu) - \nu \right]}{E\eta^4 \left( 4\eta\lambda e^{2\eta\lambda} + e^{4\eta\lambda} - 1 \right)} J_1(\eta), \quad C_4 = -\frac{a^5 p(1+\nu)(e^{2\eta\lambda} - 1)}{E\eta^3 \left( 4\eta\lambda e^{2\eta\lambda} + e^{4\eta\lambda} - 1 \right)} J_1(\eta).$$

Znając stałe całkowania, możemy znaleźć przemieszczenia (Z2.25) i naprężenia (Z2.29) wykonując odwrotną transformację Hankela.

Obliczanie transformat odwrotnych przemieszczeń oraz naprężeń w postaci analitycznej jest kłopotliwe. Możliwe jednak jest ich wyznaczenie w przypadkach szczególnych (np. dla półpłaszczyzny  $z=0$  oraz w ustalonych punktach promienia  $r$ ), stosując całkowanie numeryczne.

## 7. Ciało poprzecznie izotropowe

Ciało poprzecznie izotropowe charakteryzuje pięć stałych materiałowych [81], s. 102:  $E_1, E_3, \nu_1, \nu_3, G_3$ , (rys.Z2.8), gdzie:

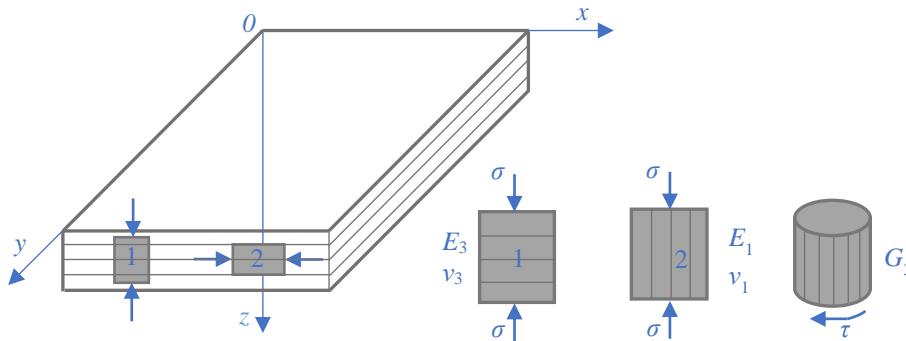
$E_1$  – moduł sprężystości w płaszczyźnie  $x_3 = z = \text{const}$ ,

$E_3$  – moduł sprężystości w kierunku osi  $x_3 = z$ ,

$\nu_1$  – współczynnik Poissona w płaszczyźnie  $x_3 = z = \text{const}$ ,

$\nu_3$  – współczynnik Poissona w kierunku osi  $x_3 = z$ ,

$G_3$  – moduł sprężystości poprzecznej (Kirchhoffa) w kierunku w kierunku osi  $x_3=z$ .



Rys.Z2.8. Model poprzecznie izotropowy<sup>112/</sup>.

Równania konstytutywne zapiszemy w następującej postaci macierzowej<sup>113/</sup>:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix}, \quad (\text{Z2.44})$$

w której oznaczono:

$G_3=C_{44}$  – moduł ścinania w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny izotropii,

$G_1 = \frac{C_{11}-C_{12}}{2}$  – moduł ścinania w płaszczyźnie izotropii  $z=const$ .

Zależności między stałymi sprężystości  $C_{ij}$  a stałymi technicznymi zapisujemy w postaci:

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{E_1(E_1\nu_3^2 - E_3)}{(1+\nu_1)[2E_1\nu_3^2 - (1-\nu_1)E_3]}, \\ C_{12} &= -\frac{E_1(E_3\nu_1 + E_1\nu_3^2)}{(1+\nu_1)[2E_1\nu_3^2 - (1-\nu_1)E_3]}, \quad C_{13} = -\frac{E_1E_3\nu_3}{2E_1\nu_3^2 - (1-\nu_1)E_3}, \\ C_{33} &= -\frac{(1-\nu_1)E_3^2}{2E_1\nu_3^2 - (1-\nu_1)E_3}, \quad G_1 = \frac{C_{11}-C_{12}}{2} = \frac{E_1}{2(1+\nu_1)}. \end{aligned} \quad (\text{Z2.45})$$

W przypadku izotropii otrzymujemy:

$$C_{11} = C_{33} = \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad C_{12} = C_{13} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}. \quad (\text{Z2.46})$$

<sup>112/</sup> Rysunek własny na podstawie monografii [81], s. 102, rys.4.5.

<sup>113/</sup> Opracowano na podstawie monografii [11], s. 91, [58], s. 157-164 oraz [61], s. 13-28.

Warunki równowagi zapisujemy w postaci:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0, \quad (Z2.47)$$
$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = 0.$$

## PRACE CYTOWANE W TEKSCIE

1. Uhov, S. B., Semenov, V. V., Znamenskij, V. V., Ter-Martirosian, Z. G., & Černyšev, S. N. (2007). *Mechanika gruntov, osnovanija i fundamenty*. Vysšaja škola. Moskva.
2. Ter-Martirosjan, Z. G. (2009). *Mechanika gruntov*. MGSU, Izd-vo Assoc. stroit. vuzov.
3. Florin, V. A. (1959). *Osnovy mehaniki gruntov*. Tom 1. Gosudarstvennoje izdatel'stvo literatury po stroitel'stvu, architekture i stroitel'nym materialam.
4. Lipiński, M. J. (2013). *Kryteria wyznaczania parametrów geotechnicznych*. Warszawa, Wydawnictwo SGGW.
5. Petrov, V. (2014). *Nelinejnaja inkremental'naja strojitel'naja mehanika*. Moskva. Infra-Inžinerija.
6. Atkinson, J. H., & Sallfors, G., (1991). Experimental determination of soil properties. *Proceedings of the 10th ECSMFE*, Vol. 3, 915-956.
7. PN-B-03020:1981. Bezpośrednie posadowienie fundamentów. Obliczenia statyczne i projektowanie.
8. Arfken, D. (1970). *Matematičeskije metody v fizike*. M.: Atomizdat.
9. Mathews, D., & Walker, R. (1972). *Matematičeskije metody fiziki*. M.: Strojizdat.
10. Tihonov, A. & Samarskij, A. (1999). *Uravnenija matematičeskoj fiziki*. Izdatel'stvo Moskovskogo universiteta.
11. Nowacki, W. (1970). *Teoria sprężystości*. Warszawa, PWN.
12. Hahn, H. (1988). *Teorija uprugosti. Osnovy linejnoj teorii i jeje primenenija*. Moskva. Mir.
13. Galerkin, B. G. (1952). Sterżni i plastinki. Rjady v nekotorych voprosach uprugogo ravnovesija sterżnej i plastinok. Moskva. *Izdatel'stvo Akademii Nauk SSSR*, 168-195.
14. Petrov, G. I. (1940). Primenenije metoda Galerkina k zadače ob ustojčivosti tečenija vjazkoj židkosti. *Prikladnaja matematika i mehanika*, IV (3), 3-11.
15. Rozin, L. A. Razvitije metoda Bubnova-Galerkina v zadačach strojitel'noj mehaniki. *Stroitel'naja mekhanika i rasčet sooruzenij*, 6, 10-15.
16. Collatz, L. (1960). *Metody numeryczne rozviqzywania równań różniczkowych*. Warszawa, PWN.
17. Samarskij, A. (1971). *Vvedenije v teoriju raznostnych schem*. Glavnaja redakcija fiziko-matematičeskoj literatury izdatel'stva «Nauka».



18. Fletcher, C. A. J. (1984). *Computational Galerkin methods*. Springer-Verlag.
19. Zienkiewicz, O. C., & Cheng, Y. K. (1965). *The Finite Element Method in Continuum and Structural Mechanics*. Mc Graw Hill, New York.
20. Brebbia, C. A., Telles, J. C. F., & Wrobel, L. C. (1984). *Boundary Element Techniques*. Springer-Verlag.
21. Nagórski, R. (2014). *Mechanika nawierzchni drogowych w zarysie*. Wydawnictwo Naukowe PWN.
22. Jemielita, G., & Szcześniak, W. (1993). Sposoby modelowania podłoża. *Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej*, 120, 5-48.
23. Winkler, E. (1867). Die Lehre von Elastizität und Festigkeit. *Verlag von H. Dominicus. Prag*.
24. Kączkowski, Z. (1980). *Płyty. Obliczenia statyczne* (wyd.3). Warszawa, Arkady.
25. Worku, A. (2014). Development of a calibrated Pasternak foundation model for practical use. *International Journal of Geotechnical Engineering*, 8(1), 26-33, DOI: 10.1179/1938636213Z.00000000055.
26. Lee, H. P. (1998). Dynamic response of a Timoshenko beam on a Winkler foundation subjected to a moving mass. *Applied Acoustics*, 55(3), 203–215.
27. Filonenko-Borodič, M. (1940). Nekotoryje približennyje teoriji uprugogo osnovanija. *Učenyje zapiski MGU*, 46, 3-18.
28. Vlasov, V. (1949). *Strojitel'naja mechanika tonkich prostranstvennych sistem*. Gosstrojizdat.
29. Vlasov, V., & Leontiev, N. (1960). *Balki, plity i oboločki na uprugom osnovaniji*. Moskva. Gosudarstvennoj izdatel'stvo fiziko-matematičeskoj literatury.
30. Wieghardt, K. (1922). Über den Balken auf nachgiebiger Unterlage. *Z. angew. Math. Mech*, 165-184.
31. Pasternak, P. (1954). *Osnovy novogo metoda rasčeta fundamentov na uprugom osnovaniji pri pomošči dvuch koëfficientov posteli*. Moskva. Gosstrojizdat.
32. Hetényi, M. (1949). *Beams on elastic foundation*. Michigan. University of Michigan Press. Ann. Arbor.
33. Žemočkin, B. (1937). *Rasčet balok na uprugom osnovaniji*. Izdanije vojenno-inženernoj akademiji RKKA imeni V.V. Kujbyševa.
34. Reissner, E. (1958). A note on deflections of plates on a viscoelastic foundation. *Journal of Applied Mechanics*. Vol. 25, 1, 144-145.

35. Reissner, E. (1967). Note on the formulation of the problem of the plate on an elastic foundation. *Acta Mechanica*. Vol. 4, 1, 88-91.
36. Kerr, A. D. (1964). Elastic and Viscoelastic Foundation Models. *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 31, 491-498.
37. Kerr, A. D. (1966). A study of a new foundation model. *Acta Mechanica*, Vol. 1, 135-147.
38. Nogami, T., & Lam, C. (1987). Two-parameter layer model for analysis of slab on elastic foundation. *Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of Engineering Mechanics Division*, 113(9), 1279–1291.
39. Jemielita, G. (1992). Generalization of the Kerr foundation model. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 30, 4, 843-853.
40. Jemielita G. (1994). Governing equations and boundary conditions of Generalized model of elastic foundation. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 32,4, 887-901.
41. Świtka, R. (1968). *Aproksymowana półprzestrzeń sprężysta jako model podłoża sprężystego*. Rozprawy Politechnika Poznańskiej, 31.
42. Kandaurov, I. (1988). *Mechanika zernistych sred i jeje primenenije v strojitel'stve* (wyd.2). Strojizdat, Leningradskoe otdelenie.
43. Gorbunov-Posadov, M. I. (1949). *Balki i plity na uprugom osnovaniji*. Mašstrojizdat.
44. Žemočkin, B., & Sinicyn, A. (1962). *Praktičeskije metody rasčeta fundamentnych balok i plit na uprugom osnovaniji* (wyd.2). M.: Strojizdat.
45. Kornejev, B., & Rucimskij, M. (1955). *Nekotoryje zadači dinamiki balok na uprugom osnovaniji*. M.: Strojizdat.
46. Höller, R., Aminbaghai, M., Eberhardsteiner, L., Eberhardsteinera, J., Blabb, R., & Pichlera, B. (2019). Rigorous amendment of Vlasov's theory for thin elastic plates on elastic Winkler foundations, based on the Principle of Virtual Power. *European Journal of Mechanics / a Solids*, 73, 449-482.
47. Mullapudi, R., & Ayoub, A. (2010). Nonlinear finite element modeling of beams on two-parameter foundations. *Computers and Geotechnics*, 37, 334-342.
48. Jones, R., & Xenophontos, J. (1977). The Vlasov foundation model. *International Journal of Mechanical Sciences*, 19, 317-323.
49. Teodoru, I. B. (2009). Beams on elastic foundation the simplified continuum approach. *Buletinul institutului politehnic din iași*, 4, 37-45.

50. Vallabhan, C. V., & Das, Y. C. (1988). Parametric study of beams on elastic foundations. *Journal of Engineering Mechanics-asce*, 114, 2072-2082.
51. Turhan, A. (1992). A consistent Vlasov model for analysis of plates on elastic foundations using the finite element method [Doktoral dissertation]. *Texas Tech University*.
52. Straughan, W. (1990). *Analysis of plates on elastic foundations* [Doktoral dissertation]. Texas Tech University.
53. Feng, Y., Fusheng, W., Senqing, J., Ziyang, W., & Zhen, W. (2020). Bending analysis of circular thin plates resting on elastic foundations using two modified Vlasov models. *Mathematical Problems in Engineering*, 1–12.
54. Kolar, V., & Nemeč, I. (1989). *Modelling of Soil-Structure Interaction*. Elsevier.
55. Ayvaz, Y., & Özgan, K. (2002). Application of modified Vlasov model to free vibration analysis of beams resting on elastic foundations. *Journal of Sound and Vibration*, 255(1), 111–127.
56. Liu, Q. & Ma, J. (2013). Analytical model for beams on elastic foundations considering the coupling of horizontal and vertical displacements. *Journal of Engineering Mechanics*, 139 (12), 1757–1768.
57. Miao, Y., Shi, Y., Wang, G., & Zhong, Y. (2017). Closed-form solution of beam on Pasternak foundation under inclined dynamic load. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 30, 596–607.
58. *Mechanika sprężystych płyt i powłok* red. Cz. Woźniak. (2001). Warszawa, PWN, Część III.
59. Lurje, A. (1970). *Teorija uprugosti*. Moskva. Nauka, glavnaja redakcija fiziko-matematičeskij literatury.
60. Szeptyński, P. (2020). *Szczegółowe omówienie podstawowych zagadnień teorii sprężystości*. Wydawnictwo PK.
61. Jemioło, S., & Szwed, A. (2017). *Zagadnienia statyki sprężystych półprzestrzeni warstwowych* (wyd.2). Seria Monografie Zakładu Wytrzymałości Materiałów, Teorii Sprężystości i Plastyczności.
62. Timoshenko, S., & Goodier, J. (1979). *Teorija uprugosti* (wyd.2). Moskva. Nauka, Glavnaja redakcia fiziko-matematičeskij literatury.
63. Rekač, V. (1966). *Rukovodstvo k rešeniju zadač po teoriji uprugosti*. M.: Vysšaja škola.

64. Sneddon, I., & Berri, D. (1961). *Klasičeskaja teorija uprugosti*. Moskva. Gosudarstvennoje izdatel'stvo fiziko-matematičeskoj literatury.
65. Bezuchov, N., & Lužin, O. (1974). Priloženije metodov teoriji uprugosti i plastičnosti k rešeniju inženernych zadač. Moskva «Vysshaja škola».
66. Ufljand, Y. (1967). *Integral'nyje preobrazovanija v zadačach teoriji uprugosti*. Leningrad. Izdatel'stvo „Nauka”.
67. Trefftz, E. (1934). *Matematičeskaja teorija uprugosti*. Leningrad. Gosudarstvennoje tehniko-teoretičeskoj izdatel'stvo.
68. Barber, J. R. *Elasticity*. Springer, Dordrecht, New York 2010.
69. Sneddon, I. (1955). *Preobrazovanija Fur'je*. Moskva. Izdatel'stvo inostrannoj literatury.
70. Ditkin, V., & Prudnikov, A. (1961). *Integral'nyje preobrazovanija i operacionnoje isčislenije*. Moskva: Gosudarstvennoje izdatel'stvo fiziko-matematičeskoj literatury.
71. Bryčkov, J., & Prudnikov, A. (1977). *Intunral'nyje preobrazovanija obobščennykh funkcij*. Moskva: Glavnaja redakcija fiziko-matematičeskoj literatury izd-va «Nauka».
72. Ryżyk, I. & Gradsztejn, I. (1964). *Tablice calek, sum, szeregów i iloczynów*. Warszawa, PWN.
73. Bronsztejn, I. & Siemiedniajev, K. (2003). *Matematyka. Poradnik encyklopedyczny*. Warszawa, PWN.
74. Romanovskij, P. (1973). *Rjady Fur'je. Teorija polja. Analitičeskije i special'nyje funkciji. Preobrazovanije Laplasa*. (wyd.5). Moskva: Glavnaja redakcija fiziko-matematičeskoj literatury izd-va «Nauka».
75. Love, A. E. H. (1929). The Stress Produced in a Semi-Infinite Solid by Pressure on Part of the Boundary. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 228, 377-420.
76. Florin, V. A. (1959). *Osnovy mehaniki gruntov*. Tom 2. Gosudarstvennoje izdatel'stvo literatury po strojitel'stvu, architekture i strojitel'nym materialam.
77. Kobyłański, M., & Jemioło, S. (1994). Zastosowanie funkcji Greena i jej implementacja numeryczna do obliczania stanu naprężenia i przemieszczenia w izotropowym gruncie od dowolnych obciążeń pionowych, Polish-Ukraine seminar. *Theoretical Foundations in Civil Engineering*, Warsaw, 63-70.
78. Wolfram Language & System Documentation Center.
79. Nowacki, W. (1971). *Dynamika budowli*. Warszawa, Arkady.

80. McLachan, N. (1964). *Funkcje Bessela dla inżynierów*. Warszawa, PWN.
81. Tajduś, A., Cała, M., & Tajduś, K. (2012). *Geomechanika w budownictwie podziemnym i tunelowaniu*. Wydawnictwo AGH.
82. Wang, C. D., Tzeng, C. S., Pan, E., & Liao, J. J. (2003). Displacements and stresses due to a vertical point load in an inhomogeneous transversely isotropic half-space. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 40(5), 667-685.
83. Wang, C.-D., Pan, E., Tzeng, C. S., Han, F., & Liao, J. (2006). Displacements and Stresses Due to a Uniform Vertical Circular Load in an Inhomogeneous Cross-Anisotropic Half-Space. *International Journal of Geomechanics*, 6(1), 1-10.
84. Lechnickij, S. (1961). K voprosu o raspredelenii naprjaženij v uprugoj poluploskosti s peremennym modulem uprugosti. *Issled. po uprugosti i plastičnosti*. Leningradskij univertitet, 2.
85. Kiesiel, I. (1982). *Mechanika techniczna. Mechanika skał i gruntów*. Warszawa, PWN.
86. Lambe, W. (1977). *Mechanika gruntów*, Tom I. Warszawa, Arkady.
87. Skempton, A. W. (1960). Effective stress in soils, concrete and rocks. *Pore pressure and suction in soils*, Butterwort, London, 4-16.
88. Hamilton, J. J. (1960). Earth pressure cells; Design calibration and performance. Tech. paper 109, *Division of building research, National research council, Ottawa, Canada*.
89. Terzaghi, K., & Peck, R. B. (1948): *Soil mechanics in engineering practice*. 2nd, New York, Wiley.
90. Atkinson, J. H. (2000). Non-linear soil stiffness in routine design. *Géotechnique*, 50(5), 487–508. DOI:10.1680/geot.2000.50.5.487.
91. Hardin, B. O., & Black, W. L. (1968). Vibration Modulus of Normally Consolidated Clay. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Div., ASCE* 94, SM 2, 353-369.
92. Jardine, R. J. (1995). One perspective of the pre-failure deformation characteristics of some geomaterials. *Proc. of International Symposium on Pre-Failure Deformation of Geomaterials (Shibuya et al., eds)*, Balkema, Rotterdam, Vol.2, 855-885.
93. Lo Presti, D. C. F., Pallara, O., Cavallaro, A., & Jamiolkowski, M. (1999). Influence of reconsolidation techniques and strain rate of the stiffness of undistributed clays from triaxial test. *Geotechnical Testing Journal, GTJODJ*, Vol.22 (3), 211-225.

94. Clayton, C. R. I., & Heymann, G. (1999). Stiffness of geomaterials from small strain triaxial and field geophysical tests. *Pre-failure Deformation Characteristic of Geomaterials*. Balkema, Rotterdam, 65-71.
95. Tatsuoka, F., & Shibuya, S. (1992). Deformation characteristics of soils and rocks from field and laboratory tests. *Keynote Paper, Proc. of 9th ARC on SMFE*, Vol. 2, 101-170.
96. Hardin, B. O., & Richart, F. E. (1963). Elastic wave velocities in granular soils. *Journal ASCE GT*, Vol. 89 (1), 33-65.
97. Roesler, S. K. (1979). Anisotropic shear modulus due to stress-anisotropy. *JGE Div. ASCE 15 (GT7)*, 871-880.
98. Jardine, R. J., Symes, M. J., & Burland, J. B. (1984). The measurement of soil stiffness in the triaxial apparatus. *Geotechnique*, Vol. 34 (3), 323-340.
99. Atkinson, J. H. & Sallfors, G. (1991). Experimental determination of soil properties. General Report to Session 1. *Proceedings of the 10th ECSMFE, Florence 3*, 915- 956.
100. Mair, R. J. (1993). Development in geotechnical engineering research: application to tunnels and deep excavations. *Proc. of the Institution of Civil Engineers, Unwin Memorial Lecture 1992, Civil Engineering*, 93, 27-41.
101. Jardine, R. J., St John H. D., Hight D. W., & Potts D. M., (1991). Some practical applications of a nonlinear ground model. *Proc. Xth ECSMFE, Florence*, Vol. 1, 223-228.
102. Hight, D. W., & Higgins, K. G. (1995). An approach to the prediction of ground movements in engineering practice: Background and application. *Proceedings of International Symposium: Pre-Failure Deformation of Geomaterials, IS-Hokkaido*, Balkema, Vol. 2, 909-945.
103. Vucetic, M. & Dobry, R. (1991). Effect of soil plasticity on cyclic response. *Journal of Geotechnical Engineering*, 117, 89-107.
104. Vucetic, M. (1992). *Soil properties and seismic response*. Proceedings of the 10th World Conference on Earthquake Engineering, Madrid, Spain, Vol. III, 1199-1204.
105. Ishihara, K. (1996). *Soil Behaviour in Earthquake Geotechnics*. Clarendon press.
106. Lipiński, M. J. *Kontakt osobisty*.
107. Kim, T. C. & Novak, M. (1981). Dynamic properties of some cohesive soils of Ontario. *Canadian Geotechnical Journal*, 18, 37 1-89.

108. Georgiannou, V. N., Hight, D. W., & Burland, J. B. (1991). Behaviour of clayey sands under undrained cyclic triaxial loading. *Geotechnique*, 41, 383-93.
109. Vucetic, M. (1994). Cyclic threshold shear strains in soils. *Journal of Geotechnical Engineering*, ASCE, 120, 2208-28.
110. Atkinson, J., & Bransby, P. (1978). The Mechanics of Soils. *An Introduction to Critical State Soil Mechanics*. McGraw-Hill Book Company (UK) Limited.
111. Badalakh, I. (2009). Naprjaženno-deformirovanije sostojanije uprugogo polupros-transtva, nagruženogo ravnomerno raspredelennoj nagruzkoj po ploščadi prjamou-gol'nika i po beskonečnoj polose. *Vestnik Dnepropetrovskogo nacional'nogo univer-siteta železnodorožnogo transporta. Nauka i progress transporta*, 26, 82-89.
112. Farshad, M., & Shahinpoor, M. (1972). Beams on bilinear elastic foundations. *Inter-national Journal of Mechanical Sciences*, 14 (7), 441-445.
113. Nowacki, W. (1963). *Teoria pelzania*. Warszawa, Arkady.
114. Korotkin, V. (1938). Ob"jemnaja zadača dlja uprugo-izotropnogo prostranstva. *Sbornik gidroênêrgoprekta*, 4.

## **Podziękowania**

Serdecznie dziękuję mojemu Promotorowi, prof. dr hab. inż. Grzegorzowi Jemielicie, za cenne uwagi związane z rozprawą doktorską, pomoc, wsparcie, wyrozumiałość, życzliwość, dobre rady, umiejętność zainteresowania daną dziedziną oraz poświęcony czas.

Również dziękuję mojemu Promotorowi, dr hab. inż. Mirosławowi Lipińskiemu za pomoc, wieloletnią opiekę oraz dobre rady i cierpliwość.

Składam także podziękowania Dyrektorowi Instytutu Inżynierii Lądowej prof. dr hab. Eugeniuszowi Kodzie oraz pracownikom Instytutu, którzy przyczynili się do powstania rozprawy.

Szczególne podziękowania składam mojej ukochanej Żonie Śnieżce - bez jej wsparcia i cierpliwości ta praca by nie powstała.

Z wyrazami szacunku Mykoła Nagirniak.



Wyrażam zgodę na udostępnianie mojej pracy w czytelniach Biblioteki SGGW.

*Magda Nazirniak*

(czytelny podpis autora)